

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» (ПГУ)
СРЕДНЕВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО



Аналитические и численные методы
моделирования естественно-научных
и социальных проблем
(АЧМ–2023)

*Сборник статей по материалам
XVIII Всероссийской с международным участием
научно-технической конференции с конкурсом научно-
исследовательских работ для обучающихся, посвященной
80-летию Пензенского государственного университета
и 80-летию кафедры «Высшая и прикладная математика»*

Россия, г. Пенза, 6–10 ноября 2023 г.

В двух частях

Часть 1

П о д р е д а к ц и е й
доктора физико-математических наук,
профессора И. В. Бойкова

Пенза • Издательство ПГУ • 2023

УДК 51
ББК 22.1
А64

Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем (АЧМ–2023) : сб. ст. по материалам XVIII Всерос. с междунар. участием науч.-техн. конф. с конкурсом научно-исследовательских работ для обучающихся, посвящ. 80-летию Пензенского государственного университета и 80-летию кафедры «Высшая и прикладная математика» (г. Пенза, 6–10 ноября 2023 г.): в 2 ч. / под ред. д.ф.-м.н., проф. И. В. Бойкова. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2023. – Ч. 1. – 278 с.

ISBN 978-5-907752-90-0 (ч. 1)

ISBN 978-5-907752-89-4

Отражены основные результаты работы конференции, охватывающие следующие направления научных исследований: уравнения математической физики; теорию приближения и кубатурные формулы; численные методы; математические модели экономики, экологии, демографии, социальных наук; математические модели в физике, нанотехнике и нанобиологии; нейроматематику и нейрокомпьютеры; информационные технологии в образовании.

Издание предназначено для обучающихся по направлению подготовки 01.03.04 «Прикладная математика» и специалистов в области вычислительной математики и математического моделирования.

УДК 51
ББК 22.1

Программный комитет

И. В. Бойков, д.ф.-м.н., профессор (Пенза, Россия) – *председатель*;
В. И. Паньженский, к.ф.-м.н., профессор (Пенза, Россия) – *заместитель председателя*; **Д. В. Артамонов**, д.т.н., профессор (Пенза, Россия);
В. И. Горбаченко, д.т.н., профессор (Пенза, Россия); **В. П. Ильин**, д.ф.-м.н., профессор (Новосибирск, Россия); **В. Д. Кревчик**, д.ф.-м.н., профессор (Пенза, Россия); **П. П. Макарычев**, д.т.н., профессор (Пенза, Россия);
П. С. Мартышко, д.ф.-м.н., профессор, член-корреспондент РАН (Екатеринбург, Россия); **М. В. Носков**, д.ф.-м.н., профессор (Красноярск, Россия); **В. И. Половинкин**, д.ф.-м.н., профессор (Санкт-Петербург, Россия);
В. С. Сизиков, д.т.н., профессор (Санкт-Петербург, Россия); **Д. Н. Сидоров**, д.ф.-м.н., профессор, профессор РАН (Иркутск, Россия); **Ю. Г. Смирнов**, д.ф.-м.н., профессор (Пенза, Россия); **Л. А. Сухарев**, к.ф.-м.н., доцент (Саранск, Россия);
С. Фаудаоглы, д.ф.-м.н., профессор (Измир, Турция); **Л. Р. Фионова**, д.т.н., профессор (Пенза, Россия); **М. А. Щербаков**, д.т.н., профессор (Пенза, Россия)

Ответственный секретарь конференции

Л. А. Купряшина, к.пед.н., доцент (Пенза, Россия)

Мероприятие проведено в рамках реализации в форме субсидий из федерального бюджета образовательным организациям высшего образования на реализацию мероприятий, направленных на поддержку студенческих научных сообществ (соглашение о предоставлении из федерального бюджета грантов в форме субсидий от 15.06.2023 № 075-15-2023-546 на реализацию мероприятий, направленных на поддержку студенческих научных сообществ)

П р и к а з

о проведении XVIII Всероссийской с международным участием научно-технической конференции «Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем» (АЧМ–2023)

№ 833/о от 21.07.2023

ISBN 978-5-907752-90-0 (ч. 1)
ISBN 978-5-907752-89-4

© Пензенский государственный
университет, 2023

1. ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

УДК 532.529:541.182

ДИНАМИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ВРАЩАЮЩИХСЯ В ЖИДКОСТИ ЧАСТИЦ

*Сергей Иванович Мартынов¹,
Леонилла Юрьевна Ткач²*

^{1,2} Сургутский государственный университет, Сургут, Россия

¹ martynovsi@mail.ru, ² leonilla7777@mail.ru

Аннотация. Моделируется динамика структуры из пяти вращающихся в жидкости частиц, образующих плоский пятиугольник. Проведено компьютерное моделирование динамики такой системы частиц в случаях, когда ось вращения частиц параллельна или перпендикулярна плоскости рассматриваемой структуры. Учитывается гидродинамическое и парное взаимодействие частиц с силами, определенными потенциалами межчастичного взаимодействия. Результаты моделирования показывают, что во всех рассмотренных случаях гидродинамическое взаимодействие приводит к вращению всей структуры по направлению вращения частиц и к устойчивости исходной конфигурации.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, динамика, система, гидродинамическое взаимодействие, вращение

DYNAMICS OF A SYSTEM OF PARTICLES ROTATING IN A FLUID

*Sergey I. Martynov¹,
Leonilla Yu. Tkach²*

^{1,2} Surgut State University, Surgut, Russia

¹ martynovsi@mail.ru, ² leonilla7777@mail.ru

Abstract. The dynamics of a system of five rotating particles rotating in a liquid, forming a pentagon in a plane, is simulated. Computer simulation of the dynamics of such a system of particles was carried out in cases where the axis of rotation of the particles is parallel or perpendicular to the plane of the structure under consideration. The hydrodynamic and pair interaction of particles with forces determined by the potentials of interparticle interaction is taken into account. The simulation results show that in all considered cases, hydrodynamic interaction leads to rotation of the entire structure in the direction of particle rotation and stability of the initial configuration.

Keywords: computer simulation, dynamics, system, hydrodynamic interaction, rotation

Равновесные структуры из активных частиц в жидкости формируются в результате межчастичного взаимодействия частиц. Положение частиц в этих структурах определяется условием минимума энергии их взаимодействия. Примером таких равновесных структур могут служить цепочки дипольных частиц или их периодическое расположение в пространстве во внешнем поле. В последние годы в международных публикациях представлены результаты обширных и интенсивно проводимых исследований неравновесных систем с активными частицами. Неравновесное состояние частиц в таких структурах обусловлено воздействием внешних полей (электрических или магнитных), химических реакций или гидродинамических течений. При внешнем воздействии в таких системах в результате коллективной динамики активных частиц формируются динамические структуры, в которых частицы находятся в условиях неравновесного состояния [1–3]. Динамические структуры, как на межфазной поверхности, так и в объеме жидкости в результате различных внешних воздействий на частицы наблюдались в работах [4–6].

Как было сказано выше, динамические структуры формируются в результат коллективной динамики большого числа частиц, активируемых внешними полями. Коллективная динамика системы частиц определяется их взаимодействием между собой. При движении частиц в жидкости гидродинамическое взаимодействие частиц является существенным фактором, определяющим их коллективную динамику. Теоретические модели динамики большого числа частиц, основанные на прямом численном моделировании динамики отдельных частиц, гидродинамическое взаимодействие учитывается или в виде силы трения, действующего на частицу, или в виде эффективной вязкости системы. При таком упрощённом учете гидродинамического взаимодействия частиц результаты моделирования коллективной динамики системы не корректны. Поэтому необходимы новые подходы, позволяющие учитывать гидродинамическое взаимодействие частиц для моделирования формирования динамической структуры, как результат коллективной динамики составляющих ее частиц.

Равновесные структуры из дипольных частиц, расположенных в вершинах правильных многоугольников, получены в работе [7]. В настоящей работе рассматривается динамика равновесной структуры из пяти дипольных частиц, расположенных в вершинах правильного пятиугольника (рис. 1).

Радиусы частиц одинаковые и равны a . Структура помещена в несжимаемую жидкость вязкости η . Во вращающемся внешнем поле дипольные частицы вращаются под действием создаваемого полем момента сил \mathbf{M} , одинакового для каждой частицы.

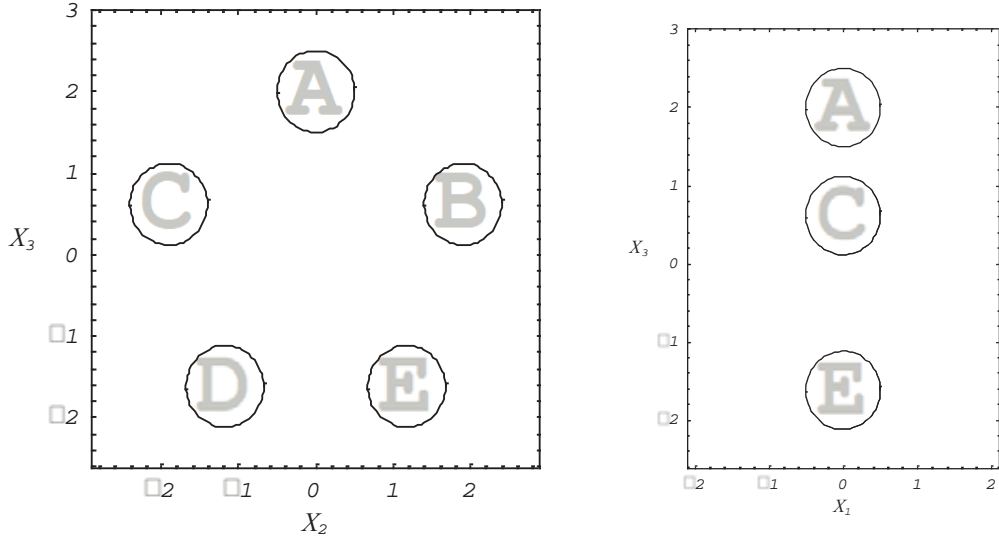


Рис. 1. Равновесная структура дипольных частиц

Энергия межчастичного взаимодействия включает в себя энергию диполь-дипольного взаимодействия и энергию, связанную с силами притяжения и отталкивания между частицами, обусловленную взаимодействием другой природы. Размер частиц будем предполагать малым, чтобы можно было пренебречь инерционными слагаемым в уравнениях движения, как жидкости, так и частиц. В этом случае система уравнений, описывающая динамику жидкости и частиц, имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

с граничными условиями на поверхности частиц

$$\mathbf{u} = \mathbf{V}^k + \boldsymbol{\Omega}^k \times \mathbf{x}^k, \quad |\mathbf{x}^k| = a, \quad k = 1, \dots, 5, \quad (2)$$

и далеко от частиц

$$\mathbf{u} \rightarrow 0, p \rightarrow p_0 \text{ при } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (3)$$

где p — давление; \mathbf{u} — вектор скорости жидкости; \mathbf{V}^k и $\boldsymbol{\Omega}^k$ — соответственно, поступательная и угловая скорость частицы с номером k ; p_0 — невозмущенное давление в жидкости; \mathbf{x}^k — вектор положение произвольной точки среды относительно центра частицы с номером k . Скорости частиц определяются из уравнений

$$\mathbf{F}^k = 0, \mathbf{M}^k + \mathbf{T}^k = 0 \quad (4)$$

где \mathbf{F}^k , \mathbf{T}^k — сумма гидродинамических сил и моментов, действующих со стороны жидкости на частицу с номером k .

Решение системы уравнений (1) с граничными условиями (2), (3), а также вычисление гидродинамических сил и моментов, действующих на частицы со стороны жидкости с учетом гидродинамического взаимодействия всех частиц, находится по методу, разработанному в работах [8, 9]. Поступательная и угловая скорость частиц определяются из решения системы уравнений (4).

Были рассмотрены два случая вращения частиц, определяемой внешним вращательным полем. В первом случае ось вращения направлена перпендикулярно плоскости частиц (ось OX_1), что соответствует вектору внешнего поля, лежащему в плоскости X_2X_3 . Во втором случае ось вращения частиц лежит в плоскости частиц (оси OX_2 или OX_3). Численное моделирование динамики системы частиц в жидкости с учетом их гидродинамического взаимодействия проводилось с использованием специального программного комплекса, позволяющего рассчитывать динамику каждой частицы и визуализировать движение системы. Результаты моделирования показывают, что в результате гидродинамического взаимодействия происходит трансформирование первоначальной равновесной структуры в динамическую. На рис. 2 показана динамическая структура, формируемая при вращении частиц относительно двух осей OX_1 и OX_2 . Как следует из полученных результатов моделирования, динамическая структура сохраняет первоначальную форму плоского пятиугольника, в вершинах которого расположены вращающиеся частицы. При этом происходит вращение структуры в двух плоскостях.

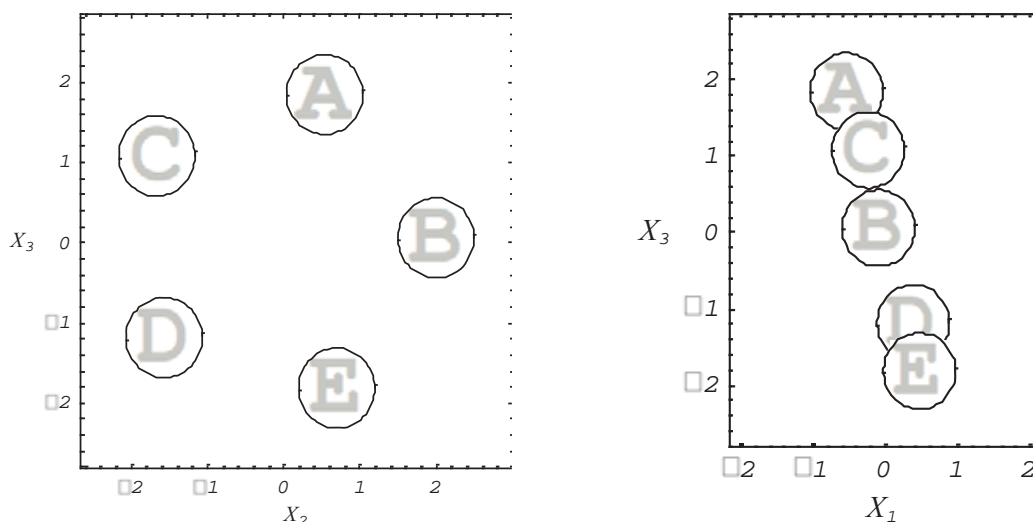


Рис. 2. Динамическая структура дипольных частиц

В случае вращения частиц относительно одной оси OX_1 , получается структура, вращающаяся в одной плоскости, что согласуется с результатами экспериментов, приведенных в работе [1]. В данной работе

приводится динамика пяти магнитных капель, расположенных в виде пятиугольника на поверхности жидкости и перемещающихся за счет вращения самих капель под действием вращающегося магнитного поля.

Список литературы

1. Wang Q., Yang L., Wang B., Yu E., Yu J., Zhang L. Collective Behavior of Reconfigurable Magnetic Droplets via Dynamic Self-Assembly // ACS Appl. Mater. Interfaces. 2019. Vol. 11, № 1. P. 1630–1637. doi: 10.1021/acsami.8b17402
2. Kokot G., Kolmakov G. V., Aranson I. S., Snezhko A. Dynamic self-assembly and self-organized transport of magnetic micro-swimmers // Scientific Reports. 2017. Vol. 7. Article number: 14726. doi: 10.1038/s41598-017-15193-z
3. Snezhko A. Complex collective dynamics of active torque-driven colloids at interfaces // Current Opinion in Colloid & Interface Science. 2016. № 21. P. 65–75. doi: 10.1016/j.cocis.2015.11.010
4. Robertson B., Stark H., Kapral R. Collective orientational dynamics of pinned chemically-propelled nanorotors // CHAOS. 2018. № 28. P. 045109. doi: 10.1063/1.5018297
5. Aubret A., Youssef M., Sacanna S., Palacci J. Targeted assembly and synchronization of self-spinning microgears // Nature Physics. 2018. Vol. 14. P. 1114–1118. doi: 10.1038/s41567-018-0227-4
6. Wang W., Duan W., Ahmed S., Sen A., Mallouk T. E. From one to many: Dynamic assembly and collective behavior of self-propelled colloidal motors // Acc. Chem. Res. 2015. № 48. P. 1938–1946. doi: 10.1021/accounts.accounts.5b00025
7. Шутый А. М. Равновесные значения и динамика суммарного магнитного момента систем магнитных диполей // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2010. Т. 137, № 2. С. 277–286.
8. Мартынов С. И. Гидродинамическое взаимодействие частиц // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 1998. № 2. С. 112–119.
9. Баранов В. Е., Мартынов С. И. Влияние гидродинамического взаимодействия на скорость осаждения большого числа частиц в вязкой жидкости // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2004. № 1. С. 152–164.

ON ANALYTICAL METHODS FOR CLASSICAL AND FRACTIONAL OSCILLATORS

Serife Faydaoğlu

Dokuz Eylül University, Izmir, Turkey

serife.faydaoglu@deu.edu.tr

Abstract. Fractional oscillators can be widely applied to represent many physical systems involving vibrations of beams, plates, and other phenomena. This models have not been researched as much as classical models. In applications, it is important to quickly find the periods of the signals produced by the oscillator. For this purpose, the fractional differential equation is considered here. It has been transformed into a classical problem by applying fractional derivatives. The solution of the fractional the fifth-order Duffing equation has been presented using the very effective and simple He's amplitude-frequency formulation.

Keywords: fractional calculus, fractional complex transform, the frequency-amplitude formulation, the fractional Duffing equation

Introduction

Strong nonlinear oscillators are encountered in many potential applications in molecular biology, communication theory, plasma physics, neuroscience, engineering and etc. [1–5]. An oscillator is a device that produces oscillations. In mechanics, the device that produces oscillation is called a pendulum, and in electronics it is called an oscillator.

It has been seen that many complex events in physics, engineering, technology and other applied sciences can be explained by fractional differential equations. For example, in civil and structural engineering, between bridges and foundations; in mechanical engineering, between shafts and bearings; in marine engineering, between ships and waves; in aerospace engineering, mathematical models of the interactions between wings and air are expressed with such equations [1–5]. For this reason, developing reliable, effective and understandable methods for solving such equations is among the current issues of researchers. Noise appears when measured on a macro scale in nonlinear vibration. However, when observed on a very small scale, it disappears when time becomes discontinuous. A phenomenon in discontinuous time can be described with a fractional model.

Also, from a mathematical perspective, a dynamic system can be modeled using integral differential equations. Fractional calculus deals with real or complex order derivatives and integrals. In recent years, great importance has been given to the solutions of real or complex order integral equations. Because it has many applications in mechanical and nuclear fields. It is often difficult to find analytical solutions to these equations. Therefore, many methods are proposed to obtain effective approximate solutions [6, 7].

Many analytical approaches have been proposed in the literature to solve classical and fractional oscillator problems, such as: the continuous method for integral equations [6], He's frequency formulation [4, 5, 11, 19, 20, 22, 29], the variational approaches [8, 16, 18], homotopy perturbation method [7–9, 21, 27], by using block-pulse wavelets [10], modified homotopy perturbation method [12, 13], by utilizing a trigonometric ansatz [14], the exp-function method [15], He's fractal derivative approach [17], improved expansion method [26] and etc. .

It is very important to investigate new analytical methods for the exact solution of the third, fifth, seventh and higher order Duffing equations [4, 13, 19–21, 25–29]. Because these methods can be applied to higher order equations. The fifth-order duffing equation has different applications in different branches of science [13, 20, 21].

In this article, the solution of the fractional Duffing equation is investigated. Definitions regarding fractional derivatives in the literature are used [9, 16, 17, 29]. Here, the fractional derivative defined as He's variational iteration algorithm is applied [8, 16, 18]. It is obtained by the amplitude-frequency relationship for the fractional Duffing oscillator encountered in applications such as wave motion and microphysics [1–5].

1. Fractional fifth-order Duffing equation

The Duffing oscillator can be written in discontinuous time as:

$$\frac{d^{2\alpha} z}{dt^{2\alpha}} + \lambda z + \varepsilon z^5 = 0, \quad z(0) = A, \quad \frac{d^{2\alpha} z}{dt^{2\alpha}}(0) = 0. \quad (1)$$

Fractional derivatives appear to be quite suitable and effective for describing complex processes, various material properties. In applications, the mathematical model that expresses that the amplitude changes discontinuously with time appears in the form of Eq. (1) [1, 3, 31].

For example, any macroscale wave is continuous. When there is interaction with air, oscillation may occur on the wave surface. Since the time scale is smaller than that used in continuum mechanics, it becomes discontinuous and the need for a fractional model arises. Furthermore, it is known in continuum mechanics that fractal spacetime on an extremely small nanoscale can be transformed into approximately continuous one on a larger scale.

Fractional complex transformations in fractional analysis transform a fractional spacetime on this small scale into a continuous one on a larger scale. This can also be understood by looking at Google Map. In a city on a small scale we can see many small rivers or lakes, when we increase the scale all the rivers or lakes disappear and the terrain of the city which is discontinuous on a small scale becomes continuous on a larger scale [1, 3, 31].

Here, Eq. (1) is converted to the classical equation with the following fractional complex transformation and solved with He's amplitude-frequency formulation.

1.1. Fractional complex transform for fractional Duffing equation

The fractional differential equations can be transformed from integer orders to nonlinear ordinary differential equations, based on nonlinear fractional complex transformation. By using the fractional complex transform [16, 18, 31]

$$u = \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \quad (2)$$

we can transform equation (1) into the following classical Duffing equation in [13]

$$\frac{d^2 z}{du^2} + \lambda z + \varepsilon z^5 = 0, \quad z(0) = A, \quad \frac{dz}{du}(0) = 0. \quad (3)$$

This model, used in many branches of physics and engineering, is used in many applications, from investigating the oscillations of a large-scale physical pendulum to processing images. In addition, with the development of autonomous systems, collaborative control algorithms that regulate the communication of mobile robots with each other have gained importance today. It seems that many areas such as satellite systems, autonomous land-sea-air vehicles, mobile robot networks are current engineering topics. Mathematical models and rapid solutions of these systems are needed. Their main features are that they exhibit aperiodic behavior and are fully dependent on initial conditions [4, 13, 19–21, 25–29].

Now let us solve this equation with the frequency formulation below.

2.3. The frequency-amplitude formulation

The frequency-amplitude formulation is derived from an ancient Chinese method for nonlinear oscillators [23]. For nonlinear oscillators, it was possible to quickly determine the frequency-amplitude relationship. Many simple frequency formulas have appeared in the literature [4, 5, 11, 19, 20, 22, 29].

Let us consider the general nonlinear oscillator

$$z'' + f(z) = 0 \quad (4)$$

subject to initial conditions

$$z(0) = A, \quad z'(0) = 0 \quad (5)$$

Here f is nonlinear function of z , and it follows $f(z)/z > 0$, $f(0) = 0$, A is the amplitude. Locating at $z = iA/N, (i = 1, 2, 3, \dots, N-1)$. The simplest frequency formulation is written for $N = 2$ [7, 23, 24]

$$w^2 = \left. \frac{df}{dz} \right|_{z=A/2}. \quad (6)$$

In literature, Eq. (6) is called as He's frequency formula [4, 5, 11, 19, 20, 22, 29].

As an example, we consider the classical Duffing equation in (1) [13].
Hereby

$$f(z) = \lambda z + \varepsilon z^5 \quad (7)$$

Its derivative is

$$f'(z) = \lambda + 5\varepsilon z^4 \quad (8)$$

By the frequency formulation of Eq. (6), we have

$$\omega^2 = \lambda + \frac{5}{16} \varepsilon A^4. \quad (9)$$

This result obtained is the same as the solutions found by perturbation method [31]. The frequency was obtained as equality (9) using homotopy and modified homotopy methods [13, 25].

2.4. The vibration in the oscillator

The solution of classical Duffing equation (3) was investigated by the authors in [13]. Hence, we can write the following solution for fractional equation

$$z(t) = A \cos \left[\sqrt{\lambda + \frac{5}{16} \varepsilon A^4} \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right]. \quad (10)$$

The t^α is relative to vibration in the oscillator. When $\alpha=1$ it becomes a classic oscillator without vibration. Figure 1. shows the great effect of the fractional order on the frequency of the oscillator.

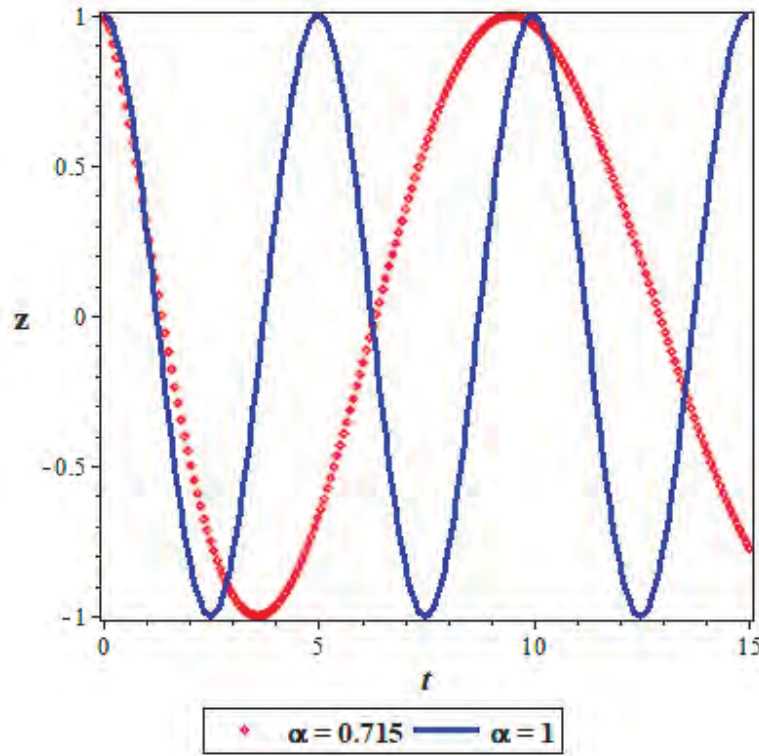


Figure 1. Effect of the fractional order on frequency in Duffing oscillation for $A=1$, $\lambda=1$ and $\varepsilon=1$

Here, the proposed method is obviously advantageous compared with other methods, which has quick calculation speed and without requirement linearization or perturbation. It can also be easily applied to classic and fractional oscillator problems with other different initial and boundary conditions.

3. Conclusion

In this paper, the fifth-order fractional Duffing equation, which has an important place in applications, is taken into consideration. This oscillator, which is physically simple to understand and easy to implement, has been simulated electrically and mechanically. Frequency formulation has been proposed to solve this equation, which is one of the chaotic systems. Since the solution process is extremely simple and highly accurate, this method can be used for rapid estimation of nonlinear dynamic systems. The results show that the proposed method has a clear advantage over other methods that have fast calculation and do not require linearization or perturbation. It can also be easily applied to other fractional oscillator problems with different initial, boundary and transmission conditions.

References

1. Nottale L. On time in microphysics // C. R. Acad. Sci. Ser. II. 1988. Vol. 306. P. 341–346.
2. Wang K., Wei C. Fractal soliton solutions for the fractal-fractional shallow water wave equation arising in ocean Engineering // Alexandria Engineering Journal. 2023. Vol. 65. P. 859–865.
3. Wang Y., Zhang Y. F., Rui W. J. Shallow water waves in porous medium for coast protection // Thermal Science. 2017. Vol. 21. P. 145–S151.
4. Wang Y., An J. Y. Amplitude-frequency relationship to a fractional Duffing oscillator arising in microphysics and tsunami motion // Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control. 2019. Vol. 38 (3-4). P. 1008–1012.
5. Wang K. J. A fast insight into the nonlinear oscillation of nano-electro-mechanical resonators considering the size effect and the van der Waals force // Europhysics Letters. 2022. Vol. 139 (2). P. 23001. doi: 10.1209/0295-5075/ac3cd4
6. Boykov I. V., Roudnev V., Boykova A. Approximate Methods for Solving Linear and Nonlinear Hypersingular Integral Equations // Axioms. 2020. Vol. 9 (3). P. 74. doi: 10.3390/axioms9030074
7. Hassan T. S., Odinaev I., Shah R., Weera W. Dynamical analysis of fractional integro-differential equations // Mathematics. 2022. Vol. 10. P. 2071. doi: 10.3390/math10122071
8. Marinca V., Ene R. D., Marinca B. Optimal homotopy perturbation method for nonlinear problems with applications // Applied and Computational Mathematics. 2022. Vol. 21 (2). P. 123–136.
9. Tabedzki P., Pawlikowski R. On the equivalence between fractional and classical oscillators // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2023. Vol. 116. P. 106871.

10. Pirmohabbati P., Refahi Sheikhan A. H., Saberi Najafi H., Ziabari A. Numerical solution of full fractional Duffing equations with Cubic-Quintic-Heptic nonlinearities // *AIMS Mathematics*. 2020. Vol. 5 (2). P. 1621–1641.
11. Ismail G. M., Abul-Ez M., Zayed M., Ahmad H., El-Moshneb M. Highly accurate analytical solution for free vibrations of strongly nonlinear Duffing oscillator // *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*. 2021. Vol. 0 (0). P. 1–7.
12. Faydaoglu S. The modified homotopy perturbation method for the approximate solution of nonlinear oscillators // *Journal of Modern Technology and Engineering*. 2022. Vol. 7 (1). P. 40–50.
13. Faydaoglu S., Ozis T. Periodic solutions for certain non-smooth oscillators with high nonlinearities // *Applied and Computational Mathematics*. 2021. Vol. 20 (3). P. 366–380.
14. Salas A. H., El-Tantawy S. A., Jairo E. C. H. On the approximate and analytical solutions to the fifth-order Duffing oscillator and its physical applications // *Waves in Random and Complex Media*. 2021. doi: 10.1080/17455030.2021.1949072
15. Li Z. B., He J. H. Fractional complex transform for fractional differential equations // *Mathematical and Computational Applications*. 2010. Vol. 15 (5). P. 970–973.
16. Feng G. Q. Higher-order homotopy perturbation method for the fractal rotational pendulum oscillator // *Journal of Vibration Engineering & Technologies*. doi: 10.1007/s42417-023-01016-1
17. El-Dib Y. O., Elgazery N. S., Khattab Y. M., Alyouse H. A. An innovative technique to solve a fractal damping Duffing-jerk oscillator // *Communications in Theoretical Physics*. 2023. Vol. 75 (5). P. 055001. doi: 10.1088/1572-9494/acc646
18. Sun J. S. Approximate analytic solution of the fractal Fisher's equation // *Thermal Science*. 2022. Vol. 26 (3B). P. 2699–2705.
19. He J. H. On the frequency-amplitude formulation for nonlinear oscillators with general initial conditions // *International Journal of Applied and Computational Mathematics*. 2021. Vol. 7 (111). doi: org/10.1007/s40819-021-01046-x
20. He J. H. The simplest approach to nonlinear oscillators // *Results in Physics*. 2019. Vol. 15. P. 102546. doi: org/10.1016/j.rinp.2019.102546
21. He J. H., Jiao M. L., Gepreeld K. A., Khan Y. Homotopy perturbation method for strongly nonlinear oscillators // *Mathematics and computers in Simulation*. 2023. Vol. 204. P. 243–258.
22. He J. H., Hou W. F., Qie N., Gepree K. A., Shirazi A. H., Sedighi H. M. Hamiltonian-Based Frequency-Amplitude formulation for nonlinear oscillators // *Facta Universitatis Series: Mechanical Engineering*. 2021. Vol. 19 (2). P. 199–208.
23. He J. H. The simpler, the better: Analytical methods for nonlinear oscillators and fractional oscillators // *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*. 2019. Vol. 38 (3-4) P. 1–9.
24. He C. H., He J. H., Sedighi H. M., El-Dib Y. O., Marinkovic D., Al-solami A. A. Analytical methods for nonlinear oscillators and solitary waves // *Frontiers Physics*. 2023. Vol. 11. doi: 10.3389/fphy.2023.1309182

25. He J. H. Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytical technique // *Applied Mathematics and Computation*. 2003. Vol. 135. P. 73–79.
26. Ali N. H., Mohammed S. A., Manafian J. New explicit solution and other solutions of the Van Der Waals model through the EShGEEM and the IEEM // *Journal of Modern Technology and Engineering*. 2023. Vol. 8 (1). 2023. P. 5–18.
27. Liu C. S. Linearized homotopy perturbation method for two nonlinear problems of Duffing equations // *Journal of Mathematics Research*. 2021. Vol. 13 (6). doi: 10.5539/jmr.v13n6p10
28. Markakis M. P. The jump phenomenon associated with the dynamics of the Duffing equation // *Physics Open*. 2020. Vol. 5. P. 100042. doi: 10.1016/j.physo.2020.100042
29. Ren Z. Y. A simplified He's frequency-amplitude formulation for nonlinear oscillators // *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*. 2022. Vol. 41. P. 209–215.
30. Li Z. B., He J. H. Fractional complex transform for fractional differential equations // *Mathematical and Computational Applications*. 2010. Vol. 15 (5). P. 970–973.
31. Nayfeh A. H. *Problems in Perturbation*. New York : Wiley, 1985.

СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ KPZ НА ОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Александр Эдуардович Рассадин

Высшая школа экономики,
Нижний Новгород, Россия
brat_ras@list.ru

Аннотация. Показано, что при рассмотрении роста поверхности твердого тела на ограниченной односвязной области двумерной плоскости в рамках уравнения Кардара – Паризи – Жанга на больших временах возможно формирование стационарных структур. Такие структуры образуются благодаря тому, что на границе рассматриваемой области ставится граничное условие 1-го рода. Профиль этой структуры определяется решением задачи Дирихле для уравнения Лапласа, т.е. формой области и значениями приведенной высоты поверхности на ее границе. При этом начальная форма поверхности не влияет на профиль стационарного образования. Также дана оценка времени технологического процесса, достаточного для формирования этой структуры.

Ключевые слова: конформное отображение, собственные значения оператора Лапласа, функция Грина, интеграл Пуассона, демон Фейнмана

STATIONARY SOLUTIONS OF THE KPZ EQUATION ON BOUNDED DOMAINS

Alexander E. Rassadin

Higher School of Economics, Nizhny Novgorod, Russia
brat_ras@list.ru

Abstract. The article shows that when considering the growth of the solid state surface on a bounded simply connected domain of a two-dimensional plane within the framework of the Kardar-Parisi-Zhang equation, the formation of stationary structures is possible over long periods. Such structures are formed due to the fact that a boundary condition of the 1st kind is imposed on the boundary of the domain under consideration. The profile of this structure is determined by the solution of the Dirichlet problem for the Laplace equation, that is, the shape of the domain and the values of the reduced height of the surface at its boundary. At the same time, the initial shape of the surface does not affect the profile of the stationary formation. The paper also estimates the duration of the technological process sufficient for the formation of this structure.

Keywords: conformal mapping, eigenvalues of the Laplace operator, Green's function, Poisson integral, Feynman's demon

Уравнение Кардара-Паризи-Жанга (KPZ) было предложено более 30 лет тому назад в работе [1], однако интерес к нему в настоящее время не только не уменьшился, а наоборот, возрос (см. [2] и ссылки там). Такое внимание к теории уравнения KPZ обусловлено его связями с квантовой теорией поля как через теорию случайных матриц [3], так и через $1/N$ разложение [4]. Между тем, в самой работе [1] это уравнение было выведено для описания процесса роста поверхности твёрдого тела при эпитаксиальной технологии.

В этом случае уравнение KPZ имеет вид [1]:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{c}{2} \cdot (\nabla h)^2 + v \cdot \nabla^2 h, \quad (1)$$

где $h(\vec{x}, t)$ – приведённая высота поверхности твёрдого тела, $\vec{x} = (x_1, x_2)$; c – скорость роста поверхности в направлении её локальной нормали; v – коэффициент поверхностной диффузии напыляемого на рассматриваемую поверхность вещества, $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2)$.

В литературе [1–4] для уравнения KPZ (1) ставится задача Коши на всей плоскости R^2 . Но в микроэлектронной промышленности технологические установки всегда имеют конечные размеры, поэтому при исследовании роста поверхности кристалла для уравнения KPZ корректнее ставить смешанную задачу.

В данной работе исследуется решение уравнения KPZ (1) с граничным условием 1-го рода (условием Дирихле):

$$h|_{\partial D} = h_1(\theta), \quad (2)$$

где D – ограниченная односвязная область плоскости R^2 с кусочно-гладкой границей; $h_1(\theta)$ – функция, непрерывная на границе этой области ∂D , причём положение точки на границе задаётся параметром θ .

Кроме того, для постановки смешанной задачи уравнение (1) должно быть дополнено начальным условием:

$$h(\vec{x}, 0) = h_0(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \bar{D} \subset R^2, \quad (3)$$

согласованным с граничным условием (2): $h_0|_{\partial D} = h_1(\theta)$.

Как и в работе [1], введём вспомогательную функцию $\varphi(\vec{x}, t)$, связанную с приведённой высотой поверхности следующим образом:

$$h(\vec{x}, t) = \frac{2v}{c} \ln \varphi(\vec{x}, t). \quad (4)$$

Замена (4) линеаризует исходное уравнение KPZ (1):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = v \cdot \nabla^2 \varphi, \quad (5)$$

а также трансформирует граничное (2) и начальное (3) условия следующим образом:

$$\varphi|_{\partial D} = \exp\left[\frac{c \cdot h_1(\theta)}{2\nu}\right] \equiv \varphi_1(\theta) \quad (6)$$

и

$$\varphi_0(\vec{x}) = \exp\left[\frac{c \cdot h_0(\vec{x})}{2\nu}\right], \quad \vec{x} \in \bar{D} \subset R^2. \quad (7)$$

Будем искать решение смешанной задачи (5)–(7) в виде:

$$\varphi(\vec{x}, t) = \Phi(\vec{x}) + \psi(\vec{x}, t), \quad (8)$$

где функция $\Phi(\vec{x})$ – это решение задачи Дирихле для области D :

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad \Phi|_{\partial D} = \varphi_1(\theta), \quad \vec{x} \in \bar{D} \subset R^2, \quad (9)$$

а $\psi(\vec{x}, t)$ – новая вспомогательная функция.

Решение задачи Дирихле (9) выражается через функцию Грина $G(z, \zeta)$ области D [5]:

$$\Phi(\vec{x}) = \oint_{\partial D} \frac{\partial G(z, \zeta)}{\partial n} \cdot \varphi_1(\zeta) \cdot |d\zeta|, \quad (10)$$

где обозначено $z = x_1 + i \cdot x_2$, $\zeta = y_1 + i \cdot y_2$, и производная от функции Грина берётся в направлении внутренней нормали к границе области ∂D .

Если известна функция $w = w(z)$, конформно отображающая область D на единичный круг $|w| < 1$, то функция Грина выражается через неё следующим образом [5]:

$$G(z, \zeta) = -\frac{1}{2\pi} \cdot \ln \left| \frac{w(z) - w(\zeta)}{1 - \overline{w(\zeta)} \cdot w(z)} \right|. \quad (11)$$

Подстановка представления (8)–(9) в формулы (5)–(7) приводит к смешанной задаче для функции $\psi(\vec{x}, t)$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \nu \cdot \nabla^2 \psi, \quad \psi|_{\partial D} = 0, \quad \psi_0(\vec{x}) = \varphi_0(\vec{x}) - \Phi(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \bar{D} \subset R^2. \quad (12)$$

Смешанная задача (12) уже гораздо проще, чем смешанная задача (5)–(7), поэтому её общее решение хорошо известно [6]:

$$\psi(\vec{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \exp(-\nu \cdot \lambda_n \cdot t) \cdot u_n(\vec{x}), \quad (13)$$

где $u_n(\vec{x})$ и λ_n – собственные функции оператора Лапласа на области D и соответствующие им собственные значения:

$$-\nabla^2 u_n = \lambda_n \cdot u_n, \quad u_n|_{\partial D} = 0, \quad \vec{x} \in \bar{D} \subset R^2, \quad n \in N, \quad (14)$$

а поскольку решения $u_n(\vec{x})$ краевой задачи (14) образуют ортонормированный базис в пространстве $L^2(D)$ [6], то:

$$c_n = \int_D [\varphi_0(\vec{x}) - \Phi(\vec{x})] \cdot u_n(\vec{x}) \cdot d^2x, \quad n \in N. \quad (15)$$

Возвращаясь к замене (4), получим, что точное решение исходной смешанной задачи (1)–(3) даётся формулами (8)–(15) и равно:

$$h(\vec{x}, t) = \frac{2\nu}{c} \ln \left[\oint_{\partial D} \frac{\partial G(z, \zeta)}{\partial n} \cdot \varphi_1(\zeta) \cdot |d\zeta| + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \exp(-\nu \cdot \lambda_n \cdot t) \cdot u_n(\vec{x}) \right]. \quad (16)$$

Далее, так как собственные значения λ_n краевой задачи (14) положительны [6], то из формулы (13) легко видеть, что:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(\vec{x}, t) = 0. \quad (17)$$

Соотношение (17) означает, что на больших временах система (1) забывает начальный профиль поверхности (3), то есть при $t \rightarrow +\infty$ формируется стационарная структура:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(\vec{x}, t) \equiv h_{\infty}(\vec{x}) = \frac{2\nu}{c} \ln \Phi(\vec{x}). \quad (18)$$

Из формулы (18) следует, что профиль $h_{\infty}(\vec{x})$ этой структуры определяется как формой области D , так и граничным условием (2). Кроме того, из формулы (13) можно сделать вывод о том, что длительность технологического процесса свыше времени $t_* \gg 1/\nu\lambda_1$ не имеет смысла, поскольку на таких временах высота поверхности в пределах инженерной погрешности перестаёт изменяться.

Проиллюстрируем развитую выше теорию следующим примером.

Пусть область D – это круг радиуса R , и пусть на граничной окружности этого круга поддерживается приведённая высота поверхности вида:

$$h_1(\theta) = \frac{2\nu}{c} \ln \frac{1 - a \cdot \cos(n \cdot \theta)}{1 - 2a \cdot \cos(n \cdot \theta) + a^2}, \quad -1 < a < 1, \quad n \in N, \quad (19)$$

где θ – это полярный угол, тогда формула (10) сводится к хорошо известному интегралу Пуассона [6], и стационарная структура (18) легко находится:

$$h_{\infty}(r, \theta) = \frac{2\nu}{c} \ln \frac{1 - ar^n/R^n \cdot \cos(n \cdot \theta)}{1 - 2ar^n/R^n \cdot \cos(n \cdot \theta) + (ar^n/R^n)^2}, \quad (20)$$

где r – это полярный радиус.

График функции (20) при $a = 0,1$ и $n = 24$ представлен на рис. 1.

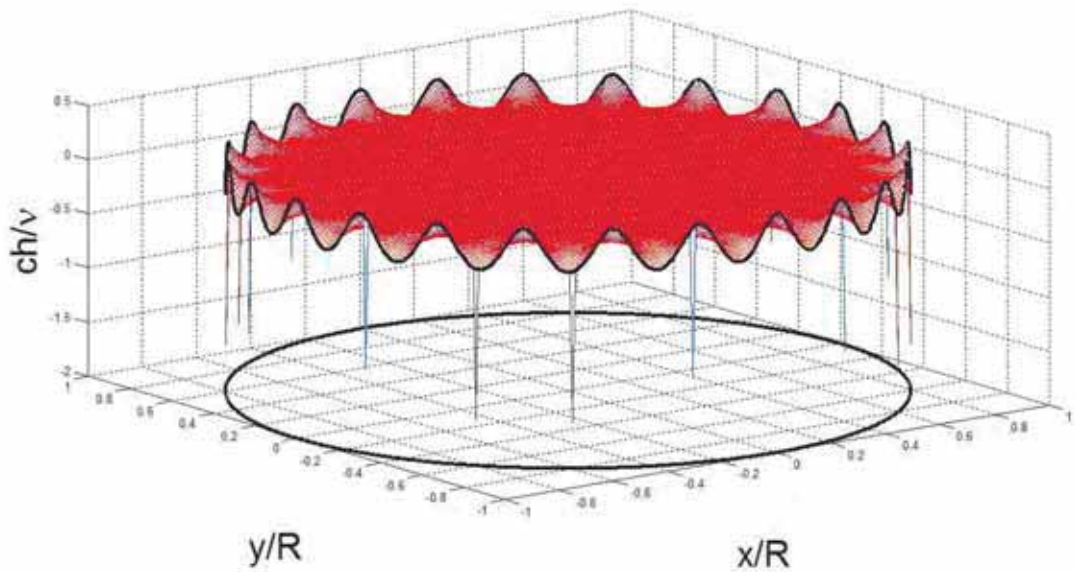


Рис. 1. Стационарная структура для уравнения KPZ

Решение краевой задачи (14) для круга хорошо известно [5], в частности, $\lambda_1 = \mu^2/R^2$, где $\mu \approx 2,4$ – первый нуль функции Бесселя с нулевым индексом, поэтому решение уравнения KPZ при любом начальном условии, согласованном с граничным условием (19), при $t \gg 0, 2 \cdot R^2/v$ выходит на стационарную структуру (20).

В заключение необходимо отметить, что физическая высота $H(\vec{x}, t)$ рассматриваемой поверхности связана с её приведённой высотой $h(\vec{x}, t)$ соотношением:

$$H(\vec{x}, t) = c \cdot t + h(\vec{x}, t), \quad (21)$$

поэтому согласно соотношению (21) физическое граничное условие для уравнения KPZ должно иметь вид:

$$H|_{\partial D} = c \cdot t + h|_{\partial D}. \quad (22)$$

Выполнение условия (22) на данном этапе может быть гарантировано лишь гипотетическим наноразмерным разумным существом, которое можно назвать демоном Фейнмана. Однако есть некоторая уверенность в том, что демон Фейнмана может быть физически реализован с помощью композитного нанопинцета с эффектом памяти формы [7] – так же, как был не так давно физически реализован демон Максвелла [8].

Список литературы

1. Kardar M., Parisi G., Zhang Y. C. Dynamical scaling of growing interfaces // Physical Review Letters. 1986. Vol. 56. P. 889–892.
2. Gubinelli M., Perkowski N. KPZ Reloaded // Communications in Mathematical Physics. 2017. Vol. 349, № 1. P. 165–269.

3. Gorin V., Sodin S. The KPZ equation and moments of random matrices // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. 2018. Vol. 14, № 3. P. 286–296.

4. Борк Л. В., Огарков С. Л. Об уравнении Кардара – Паризи – Чжана и его матричном обобщении // Теоретическая и математическая физика. 2014. Т. 178, № 3. С. 416–432.

5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М. : Наука, 1987. 688 с.

6. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М. : Наука, 1988. 512 с.

7. Von Gratowski S. [et al.]. Advanced System for Nanofabrication and Nanomanipulation Based on Shape Memory Alloy // Frontiers in Materials Processing, Applications, Research and Technology / ed. by M. Murganant, A. Chirazi, B. Raj. Singapore : Springer, 2018. doi: 10.1007/978-981-10-4819-7_13

8. Kumar A., Wu T. Y., Giraldo F. [et al.]. Sorting ultracold atoms in a three-dimensional optical lattice in a realization of Maxwell's demon // Nature. 2018. Vol. 561. P. 83–87. doi: 10.1038/s41586-018-0458-7

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ «ТРУБОПРОВОД – ДАТЧИК ДАВЛЕНИЯ»

*Петр Александрович Вельмисов¹,
Юлия Александровна Тамарова²,
Павел Михайлович Абрашкин³*

^{1,2,3} Ульяновский государственный технический университет,
Ульяновск, Россия

¹ velmisov@ulstu.ru, ² kazakovaua@mail.ru, ³ abrashkinpm@gmail.com

Аннотация. Рассматривается одномерная модель механической системы «трубопровод – датчик давления», на основе которой исследуется совместная динамика упругого чувствительного элемента датчика давления и рабочей среды в трубопроводе в предположении, что среда идеальная и сжимаемая. Для описания движения рабочей среды (газа или жидкости) используется нелинейная модель механики жидкости и газа. Исследование задачи с помощью метода Галеркина сведено к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Проведен численный эксперимент, а также представлены примеры расчета динамики чувствительного элемента датчика.

Ключевые слова: датчик давления, трубопровод, упругий элемент, динамика, дифференциальные уравнения, метод Галеркина

Финансирование: работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 23-21-00517.

MATHEMATICAL MODELING OF THE MECHANICAL SYSTEM “PIPELINE – PRESSURE SENSOR”

Peter A. Velmisov¹, Yulia A. Tamarova², Pavel M. Abrashkin³

^{1,2,3} Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk, Russia

¹ velmisov@ulstu.ru, ² kazakovaua@mail.ru, ³ abrashkinpm@gmail.com

Abstract. A one-dimensional model of the mechanical system “pipeline – pressure sensor” is considered, on the basis of which the joint dynamics of the elastic sensing element of the pressure sensor and the working medium in the pipeline are studied under the assumption that the medium is ideal and compressible. To describe the movement of the working medium (gas or liquid), a nonlinear model of fluid and gas mechanics is used. The study of the problem using the Galerkin method is reduced to solving a system of ordinary differential equations. A numerical experiment is carried out and examples of calculating the dynamics of the sensor's sensitive element are presented.

Keywords: pressure sensor, pipeline, elastic element, dynamics, differential equations, Galerkin method

Financing: this work was supported by a grant from the Russian Science Foundation No. 23-21-00517.

Датчики являются первичным звеном приборного оборудования для измерения давления газожидкостной среды. Описанию датчиков измерительных систем, принципов их работы, технических характеристик посвящено много работ, например [1–8].

На рис. 1 в начальном сечении $x = 0$ трубопровода (на выходе из камеры сгорания двигателя) задан закон изменения давления рабочей среды $P = P_0 + P_*(t)$, где P_0 – давление в состоянии покоя; $P_*(t)$ – избыточное давление. Состоянию покоя соответствует положение $x = l$ поршня, являющегося составной частью датчика давления и закрепленного с помощью системы упругих связей и демпферов. Отклонение поршня от положения равновесия обозначим $w(t)$. Поставим своей целью получение уравнения, связывающего закон изменения давления в двигателе $P_*(t)$ с величиной перемещения поршня $w(t)$ в любой момент времени t .



Рис. 1. Схема механической системы «трубопровод – датчик давления»

Математическая модель данной механической системы может быть представлена в виде

$$\Phi_{tt} + 2\Phi_x \Phi_{xt} + \Phi_x^2 \Phi_{xx} = \left[a_0^2 - (\chi - 1) \left(\Phi_t + \frac{1}{2} \Phi_x^2 \right) \right] \Phi_{xx}, \quad (1)$$

$$P(0, t) = P_0 + P_*(t), \quad (2)$$

$$\Phi_x(l_*(t), t) = \dot{w}(t), \quad l_* = l + w(t), \quad (3)$$

$$L(w(y, t)) \equiv m\ddot{w}(t) + \alpha\dot{w}(t) + \gamma w(t) = P(l_*(t), t) \quad (4)$$

В (1)–(4) $\Phi(x, t)$ – потенциал скорости; $P(x, t)$ – давление в рабочей среде (в жидкости или газе); a_0 – скорость звука, соответствующая состоянию покоя рабочей среды; χ – коэффициент Пуассона; m – масса упругого элемента; α , γ – коэффициенты демпфирования и жесткости упругой связи.

Уравнение (1) для потенциала скорости $\Phi(x, t)$ описывает движение сжимаемой рабочей среды (в модели идеального газа) в трубопроводе, условие (2) задает закон изменения давления $P_*(t)$ рабочей среды на выходе из камеры сгорания (на входе в трубопровод $x = 0$), условие (3) – условие непротекания на поверхности поршня, (4) –

уравнение, описывающее движение поршня. При этом давление в потоке определяется интегралом Лагранжа – Коши

$$P(x, t) = P_0 \left[1 - \frac{\chi - 1}{a_0^2} \left(\Phi_t + \frac{1}{2} \Phi_x^2 \right) \right]^{\frac{\chi}{\chi - 1}} \quad (5)$$

Условие (2) с учетом (5) можно записать в виде

$$\left(\Phi_t + \frac{1}{2} \Phi_x^2 \right)_{x=0} = \psi(t) = \frac{a_0^2}{\chi - 1} \left[1 - \left(1 + \frac{P_*(t)}{P_0} \right)^{\frac{\chi - 1}{\chi}} \right] \quad (6)$$

Введем функции $u = \Phi_x$, $v = \Phi_t + \frac{1}{2} \Phi_x^2$. Тогда уравнения (1)–(5), представляющие математическую модель, будут иметь вид

$$v_t + uv_x - \left[a_0^2 - (\chi - 1)v \right] u_x = 0 \quad (7)$$

$$v_x - u_t - uu_x = 0 \quad (8)$$

$$v(0, t) = \psi(t) \quad (9)$$

$$u(l_*, t) = \dot{w}(t), \quad (10)$$

$$L(w) = P_0 \left[1 - \frac{\chi - 1}{a_0^2} v(l_*, t) \right]^{\frac{\chi}{\chi - 1}} \quad (11)$$

В (10)–(11) $l_* = l + w(t)$. Исходя из граничных условий (9), (10), будем искать $v(x, t)$, $u(x, t)$ в виде отрезков степенных рядов

$$u(x, t) = \dot{w}(t) + \sum_{n=1}^N u_n(t)(l_* - x)^n \quad (12)$$

$$v(x, t) = \psi(t) + \sum_{k=1}^N v_k(t)x^k \quad (13)$$

Подставляя (12), (13) в (7), (8), записывая условия ортогональности полученных невязок к функциям $\{\theta_n(x)\}$, образующих на $[0, l_*]$ полную систему, получим $2N$ уравнений для $(2N + 1)$ функции $w(t), u_1(t), \dots, u_N(t), v_1(t), \dots, v_N(t)$. К этим уравнениям следует добавить уравнение (11). В силу граничных условий (9), (10) можно выбрать, например,

$$\theta_n(x) = x(l_* - x)^n, \quad \theta_n(x) = x^n(l_* - x), \quad \theta_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{l_*}x\right), \quad n = 1 \div \infty \quad (14)$$

Рассмотрим в качестве примера $N = 1$, тогда

$$u(x, t) = \dot{w}(t) + u_1(t)(l_* - x), \quad v(x, t) = \psi(t) + v_1(t)x \quad (15)$$

Подставим (15) в (7), (8):

$$\begin{aligned} v_1(t) - \ddot{w}(t) - \dot{u}_1(t)(l_* - x) - u_1(t)\dot{w}(t) + [\dot{w}(t) + u_1(t)(l_* - x)]u_1(t) &= 0 \\ \dot{\psi}(t) + \dot{v}_1(t)x + [\dot{w}(t) + u_1(t)(l_* - x)]v_1(t) + [a_0^2 - (\chi - 1)(\psi(t) + v_1(t)x)]u_1(t) &= 0 \end{aligned}$$

Умножим полученные невязки на $x(l_* - x)$ и проинтегрируем в пределах от 0 до l_*

$$2(v_1 - \ddot{w}) - l_*(\dot{u}_1 - u_1^2) = 0 \quad (16)$$

$$2 \left[\dot{\psi} + \dot{w}v_1 + \left(a_0^2 - (\chi - 1)\psi \right) u_1 \right] + [\dot{v}_1 - (\chi - 1)v_1u_1 + u_1v_1] l_* = 0 \quad (17)$$

Уравнение (11) принимает вид

$$L(w) = P_0 \left[1 - \frac{\chi - 1}{a_0^2} (\psi(t) + v_1(t)l_*) \right]^{\frac{\chi}{\chi - 1}} \quad (18)$$

Система трех уравнений (16)–(18) служит для определения трех функций $v_1(t)$, $u_1(t)$, $w(t)$ и является основой для проведения численного эксперимента. Для решения в пакете Mathematica система уравнений (16)–(18) приведена к нормальной форме и имеет вид

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = \frac{1}{m} P_0 \left[1 - \frac{\chi - 1}{a_0^2} (\psi(t) + y_4(l + y_1)) \right]^{\frac{\chi}{\chi - 1}} - \frac{\alpha}{m} y_2 - \frac{\gamma}{m} y_1, \\ \dot{y}_3 = y_3^2 + \frac{2}{l + y_1} \left(y_4 - \frac{1}{m} P_0 \left[1 - \frac{\chi - 1}{a_0^2} (\psi(t) + y_4(l + y_1)) \right]^{\frac{\chi}{\chi - 1}} + \frac{\alpha}{m} y_2 + \frac{\gamma}{m} y_1 \right), \\ \dot{y}_4 = (\chi - 2)y_3y_4 - \frac{2}{l + y_1} (\dot{\psi} + y_2y_4 + (a_0^2 - (\chi - 1)\psi)y_3) \end{cases}$$

где $y_1(t) = w(t)$, $y_2(t) = \dot{w}(t)$, $y_3(t) = u_1(t)$, $y_4(t) = v_1(t)$.

Пример 1. Рабочая среда – воздух, параметры системы:

$$P_0 = 101325, a_0 = 332, \chi = 1.5, l = 3, m = 0.01, \alpha = 10^3, \gamma = 5 \cdot 10^9.$$

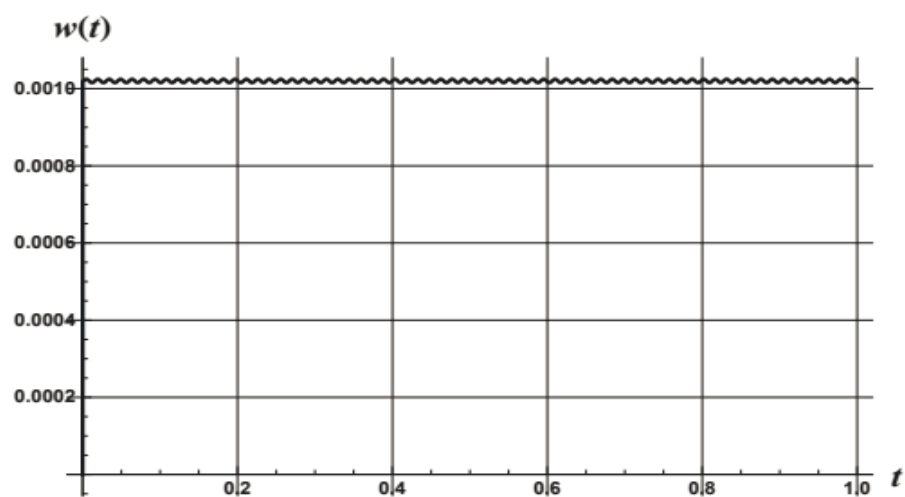


Рис. 2. Динамика чувствительного элемента при $P_*(t) = 5 \cdot 10^6$

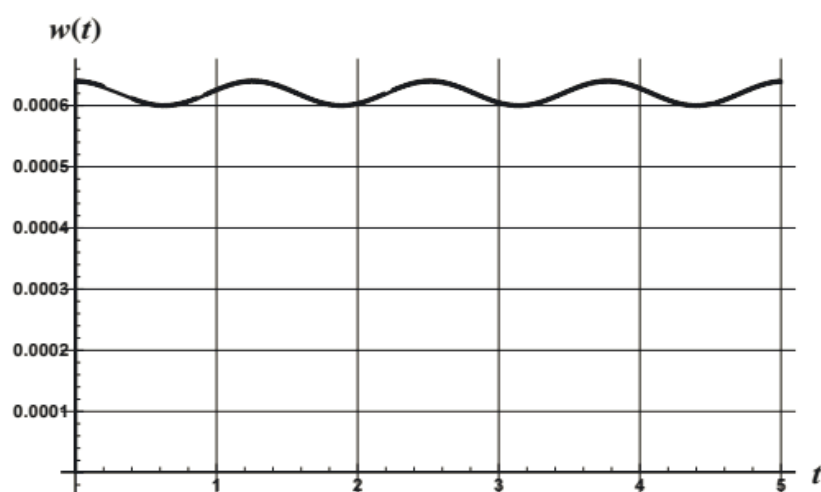


Рис. 3. Динамика чувствительного элемента
при $P_*(t) = 3 \cdot 10^6 + 10^5 \cos 5t$

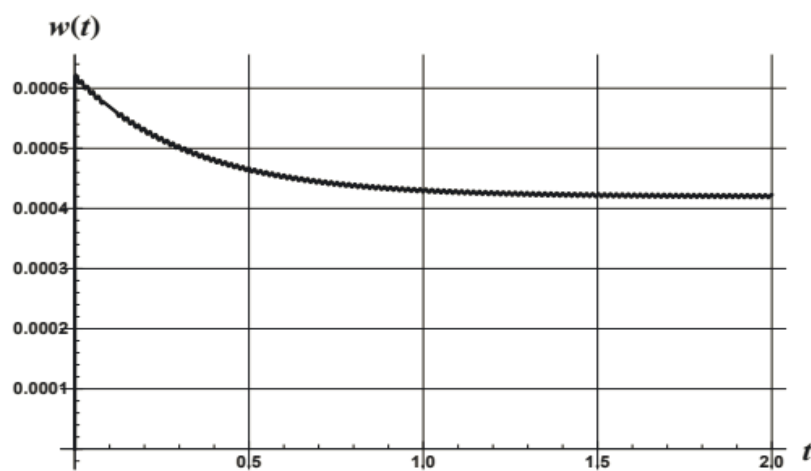


Рис. 4. Динамика чувствительного элемента
при $P_*(t) = 2 \cdot 10^6 + 10^6 e^{-3t}$

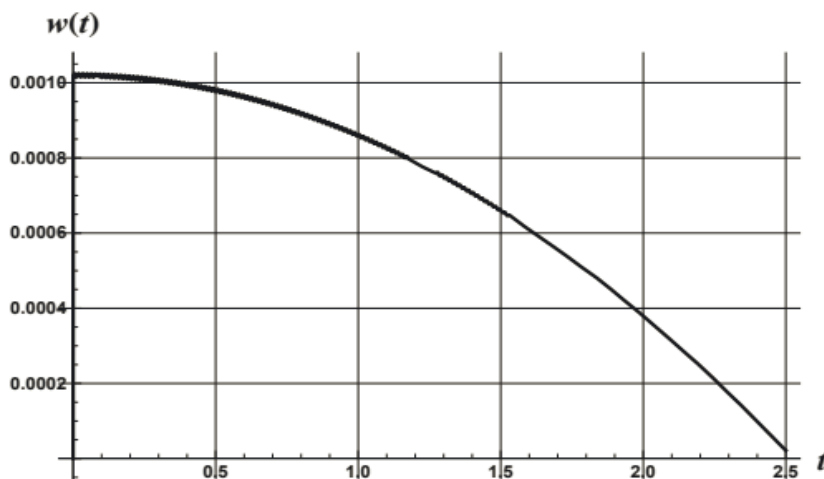


Рис. 5. Динамика чувствительного элемента
при $P_*(t) = 5 \cdot 10^6 - 8 \cdot 10^5 t^2$

Список литературы

1. Белозубов Е. М., Васильев В. А., Запевалин А. И., Чернов П. С. Проектирование упругих элементов нано- и микроэлектромеханических систем // Измерительная техника. 2011. № 1. С. 17–19.
2. Эткин Л. Г. Виброчастотные датчики. Теория и практика. М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 408 с.
3. Аш Ж. [и др.]. Датчики измерительных систем : в 2 кн. / пер. с франц. М. : Мир, 1992. Кн. 1. 480 с.
4. Аш Ж. [и др.]. Датчики измерительных систем : в 2 кн. / пер. с франц. М. : Мир, 1992. Кн. 2. 424 с.
5. Агейкин Д. И., Костина Е. Н., Кузнецова Н. Н. Датчики контроля и регулирования. М. : Машиностроение, 1965. 928 с.
6. Корсунов В. П. Упругие чувствительные элементы. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 1980. 264 с.
7. Пирогов С. П. Манометрические трубчатые пружины. СПб. : Недра, 2009. 276 с.
8. Андреева Л. Е. Упругие элементы приборов. 2-е изд. М. : Машиностроение, 1981. 392 с.
9. Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А. Математическое моделирование систем измерения давления в газожидкостных средах // Журнал Средневолжского математического общества. 2020. Т. 22, № 3. С. 352–367.
10. Тамарова Ю. А., Вельмисов П. А., Алексанин Н. Д., Нуруллин Н. И. Исследование динамических процессов в системах измерения давления газожидкостных сред // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 4. С. 461–471.

11. Velmisov P. A., Tamarova Y. A., Pokladova Y. V. Mathematical modeling of pressure monitoring systems in fluid and gaseous media // AIP Conference Proceedings. 2021. Vol. 2333. P. 120004. doi: 10.1063/5.0041778
12. Velmisov P. A., Tamarova Y. A., Pokladova Y. V. Mathematical modeling of a class of aerohydroelastic systems // Journal of Mathematical Sciences (United States). 2021. Vol. 255 (5). P. 587–594. doi: 10.1007/s10958-021-05395-2

ИНТЕГРО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА ВТОРОГО РОДА: ТОЧКИ СПЕКТРА И СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Денис Николаевич Сидоров¹, Николай Александрович Сидоров²

¹ Иркутский национально-исследовательский технический университет,
Иркутск, Россия

² Иркутский государственный университет,
Иркутск, Россия

¹ sidorovdn@istu.edu, ² sidorov@math.isu.runnet.ru

Аннотация. Изучается интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода с иско-
мой функцией, зависящей от возмущения аргумента. Рассматривается регу-
лярный случай, когда решение существует и единственно в классе непре-
рывных функций. В нерегулярном случае соответствующее однородное
уравнение имеет нетривиальное решение, строятся собственные числа, обра-
зующие дискретное множество с точкой сгущения в нуле. Для соответству-
ющих собственных функций построены их асимптотические приближения.

Ключевые слова: интегро-функциональный оператор Вольтерра, собствен-
ные числа, собственные функции, теорема существования

INTEGRO-FUNCTIONALIZED VOLTERRA EQUATIONS OF THE SECOND KIND: SPECTRUM POINTS AND EIGENFUNCTIONS

Denis N. Sidorov¹, Nikolay A. Sidorov²

¹ Irkutsk National Research Technical University,
Irkutsk, Russia

² Irkutsk State University, Irkutsk, Russia

¹ sidorovdn@istu.edu, ² sidorov@math.isu.runnet.ru

Abstract. The Volterra integral equation of the 2nd kind with the desired function
depending on the perturbation of the argument is studied. The regular case when
the solution exists and is singular in the class of continuous functions is studied.
In the irregular case, the corresponding homogeneous equation has a nontrivial
solution, and the eigenvalues forming a discrete set with a densification point at
zero are constructed. Asymptotic approximations are constructed for the
corresponding eigenfunctions.

Keywords: Volterra integro-functional operator, eigenvalues, eigenfunctions,
existence theorem

Обратимся к классу интегро-функциональных уравнений Вольтерра второго рода, возникающих, например, при построении теории интегральных уравнений с разрывными ядрами, см. работы [1, 2], монографию [2] и библиографию в ней.

Введем оператор

$$Ax = \int_0^t K(t, s)x(s)ds + a(t)x(\alpha t), \quad (1)$$

где ядро определено и непрерывно $D = \{s, t | 0 < s \leq t \leq T < \infty\}$, $a(t)$ – непрерывная функция при $t \in (0, T)$, $\alpha = \text{const}$, $\alpha \in (0, 1)$. λ является собственным числом оператора A , если уравнение

$$\lambda x(t) = \int_0^t K(t, s)x(s)ds + a(t)x(\alpha t) \quad (2)$$

имеет нетривиальное решение $\phi(t) \neq 0$.

Очевидно, что для того, чтобы число λ могло быть собственным числом оператора $A \in L(C_{[0, T]} \rightarrow C_{[0, T]})$ необходимо, чтобы $|\lambda| \leq \|a\|_{C_{[0, T]}}$.

Т е о р е м а 1.

Пусть $K(t, s), a(t), f(t)$ – непрерывные функции, $\|a\|_{C_{[0, T]}} < |\lambda|$. Тогда уравнение

$$\lambda x(t) = \int_0^t K(t, s)x(s)ds + a(t)x(\alpha t) + f(t) \quad (3)$$

имеет единственное непрерывное решение а однородное уравнение (2) имеет только нетривиальное решение.

Доказательство следует из принципа сжимающих отображений.

Далее будем предполагать, что $\|a\| \geq |\lambda|$ так как этот случай является наиболее интересным в теоретическом плане. Назовем его нерегулярным случаем для уравнений (2) и (3).

Покажем, что в нерегулярном случае оператор (1) может иметь собственные числа $\lambda \neq 0$ в области $0 < |\lambda| \leq \|a\|$. Изложим метод отыскания таких собственных чисел и соответствующих собственных функций оператора A . На этой основе можно предложить приближенный метод решения неоднородного уравнения (3) в нерегулярном случае.

Далее в операторе A для простоты $a = \text{const}$. Так как нас интересует нерегулярный случай, то $|a| \geq |\lambda|$.

Т е о р е м а 2.

Пусть $K(t, s)$ – непрерывное ядро, $\alpha \in (0, 1)$. Тогда последовательность $\lambda_n = a\alpha^n, n = 0, 1, 2, \dots$ образует счетное множество собственных чисел оператора $A \in L(C_{[0, T]} \rightarrow C_{[0, T]})$, а функции $\varphi_n(t) \sim t^n, n = 0, 1, \dots$ – суть асимптотическое приближение соответствующих собственных функций при $t \rightarrow 0$.

З а м е ч а н и е.

Если выполнены условия Теоремы 2, то решение неоднородного уравнения $a\alpha^n x(t) = \int_0^t K(t,s)x(s)ds + ax(\alpha t) + f(t)$, где ядро и $f(t)$ – n -раз непрерывно дифференцируемые, можно построить сочетая метод неопределенных коэффициентов с методом последовательных приближений в виде $x(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i + t^n \left(1 - \frac{f^{(n)}(0)}{n!a\alpha^n \ln \alpha} \ln t\right) + o(t^n)$.

Список литературы

1. Сидоров Д. Н. О параметрических семействах решений интегральных уравнений Вольтерры I рода с кусочно-гладкими ядрами // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 2. С. 209–215.
2. Sidorov D. N. Generalized Solution to the Volterra Equations with Piecewise Continuous Kernels // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 2014. Vol. 37, № 2. P. 623–639.
3. Сидоров Н. А., Сидоров Д. Н. О разрешимости одного класса операторных уравнений Вольтерра первого рода с кусочно-непрерывными ядрами // Математические заметки. 2014. Т. 96, № 5. С. 773–789.
4. Сидоров Д. Н. Методы анализа интегральных динамических моделей: теория и приложения. Иркутск : Изд-во ИГУ, 2013. 293 с.

ОБ АСИМПТОТИКЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Бахрам Али оглы Алиев¹, Тунзала Магеррам кызы Гусейнова²

¹ Институт Математики и Механики Национальной академии
наук Азербайджана, Баку, Азербайджанская Республика

² Азербайджанский Государственный педагогический университет,
Баку, Азербайджанская Республика

¹ aliyevbakhram@yandex.ru, ² htunzale_bsu@mail.ru

Аннотация. Исследуются собственные значения одной краевой задачи для двумерного уравнения Лапласа в квадрате. Доказано, что рассматриваемая спектральная краевая задача имеет одну серию собственных значений, которая асимптотически ведет себя как $\lambda_{n,k} \sim k^2 + \frac{n^2}{4}$ при $n, k \rightarrow \infty$.

Ключевые слова: собственные значения, уравнения Лапласа, гильбертово пространство

ON THE ASYMPTOTICS OF THE EIGENVALUES OF ONE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE LAPLACE EQUATION

Bahram Ali Aliyev¹, Tunzala Maharram Huseynova²

¹ Institute of Mathematics and Mechanics of National Academy
of Sciences of Azerbaijan, Baku, Republic of Azerbaijan

² Azerbaijan State Pedagogical University,
Baku, Republic of Azerbaijan

¹ aliyevbakhram@yandex.ru, ² htunzale_bsu@mail.ru

Abstract. The eigenvalues of one boundary value problem for the two-dimensional Laplace equation in a square are studied. It is proved that the spectral boundary value problem under consideration has one series of eigenvalues, which asymptotically behaves as $\lambda_{n,k} \sim k^2 + \frac{n^2}{4}$, for $n, k \rightarrow \infty$.

Keywords: eigenvalues, Laplace equations, Hilbert space

В данной работе исследуется асимптотическое поведение собственных значений следующей краевой задачи для уравнения Лапласа в квадрате $\Omega = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$:

$$-\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = \lambda u(x, y), \quad (1)$$

$$\frac{\partial u(0, y)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(2\pi, y)}{\partial x} + i \frac{\partial u(2\pi, y)}{\partial y} = 0, \quad y \in [0, 2\pi], \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u(x, 2\pi), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = \frac{\partial u(x, 2\pi)}{\partial y}, \quad x \in [0, 2\pi]. \quad (3)$$

Доказано, что собственные значения краевой задачи (1)–(3) вещественные и имеют одну серию собственных значений, которая асимптотически ведет себя, как $\lambda_{n,k} \sim k^2 + \frac{n^2}{4}$ при $n, k \rightarrow +\infty$.

Отметим что, если вместо условия (2) рассмотреть условие

$$u(0, y) = 0, \quad \frac{\partial u(2\pi, y)}{\partial x} + i \frac{\partial u(2\pi, y)}{\partial y} = 0, \quad y \in [0, 2\pi], \quad (2')$$

то поведение собственных значений краевой задачи (1)–(3) исследовано в работе С. Я. Якубова [1]. В работе [1] доказано, что для задачи (1), (2'), (3) существует последовательность собственных значений λ_k сходящихся к нулю. Точнее, классическая ситуация о собственных значениях для краевой задачи (1), (2'), (3) нарушена.

Если вместо условия (2) рассмотреть условие вида

$$u(0, y) = 0, \quad u(2\pi, y) + i \frac{\partial^2 u(2\pi, y)}{\partial y \partial x} = 0, \quad y \in [0, 2\pi], \quad (2'')$$

то асимптотическое поведение собственных значений краевой задачи (1), (2''), (3) исследовано в работе [2]. Показано, что собственные значения краевой задачи (1), (2''), (3) вещественны и имеют две серии собственных значений: одна из которых конечная последовательность, удовлетворяющая неравенству $k^2 - 1 < \lambda_k < k^2$, $k = \overline{1, 6}$, а другая серия ведет себя асимптотически, как $\lambda_{n,k} \sim k^2 + \frac{n^2}{4}$, при $n, k \rightarrow +\infty$.

Известно, что многие спектральные краевые задачи для уравнения Лапласа заданных в прямоугольнике сводятся к спектральным краевым задачам для эллиптических дифференциально-операторных уравнений второго порядка в некотором гильбертовом пространстве. Обычно, в спектральных задачах для эллиптических дифференциально-операторных уравнений, оператор фигурирующий в уравнении является оператором с дискретным спектром, собственные элементы которого образуют полный ортонормированный базис в некотором гильбертовом пространстве. Следовательно, любой элемент из того же гильбертового пространства разлагается в ряд Фурье, по этим базисам. После спектрального разложения в ряд Фурье, спектральная задача поставленная для эллиптических дифференциально-операторных уравнений

сводится к спектральной краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов Фурье.

В работе [1] используя выше указанную схему, изучено асимптотическое поведение собственных значений краевой задачи (1), (2'), (3), которой придерживаются и в данной работе для изучения асимптотического поведения собственных значений краевой задачи (1)–(3).

Отметим, что в работе [3], в сепарабельном гильбертовом пространстве H изучено асимптотическое поведение собственных значений следующей краевой задачи:

$$-u''(x) + Au(x) = \lambda u(x), \quad x \in (0,1), \quad (4)$$

$$u'(0) + \lambda u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \quad (5)$$

где λ – спектральный параметр; A линейный неограниченный самосопряженный положительно-определенный оператор в H такой, что обратный оператор A^{-1} вполне непрерывен в H . При этих условиях доказано, что собственные значения краевой задачи (4), (5) ведет себя классически.

Аналогичные вопросы для уравнения (4) с граничными условиями вида

$$u'(0) + d\lambda^2 u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \quad (6)$$

где $d > 0$ некоторое число и

$$u'(0) + (\alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2) u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \quad (7)$$

где α_i ($i = 0, 1, 2$) – некоторые вещественные числа, причем $\alpha_0 < 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_1 \neq 0$, изучены соответственно в работах [4] и [5]. Доказано, что краевая задача (4), (6) имеет две серии собственных значений, одна из которых сходится к нулю, а другая серия сходится к $+\infty$. А краевая задача (4), (7) имеет три серии собственных значений, две из них сходятся к некоторому вещественному числу, а третья серия сходится к $+\infty$. Точнее, для краевых задач (4), (5) и (4), (7) нарушена классическая ситуация.

Лемма. Собственные значения краевой задачи (1)–(3) вещественные.

Доказательство. В гильбертовом пространстве $L_2(0, 2\pi)$ рассмотрим операторы A и B , которые определяются следующими равенствами:

$$D(A) := W_2^2((0, 2\pi); u(0) = u(2\pi), u'(0) = u'(2\pi)), \quad Au = -\frac{d^2 u}{dy^2};$$

$$D(B) := W_2^1((0, 2\pi); u(0) = u(2\pi)), \quad Bu = i \frac{du}{dy}.$$

Собственными значениями оператора A являются числа $\mu_k(A) = k^2$, $k = 0, 1, 2, \dots$ которым при $k > 0$ соответствует пара собственных функций:

$$u_{k1}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iky}, u_{k2}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iky}, k = 1, 2, \dots$$

Собственными значениями оператора B являются числа $\mu_k(B) = k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Собственным значениям $\mu_k(B) = -k$, $k = 0, 1, \dots, 2$ соответствуют собственные функции $u_{k1}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iky}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, а собственным значениям $\mu_{-k}(B) = k$, $k = 1, 2, \dots$, соответствуют собственные функции $u_{k2}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iky}$, $k = 1, 2, \dots$

Задача (1)–(3) в $L_2(0, 2\pi)$ сводится к краевой задаче для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка с операторными граничными условиями

$$-u''(x) + Au(x) = \lambda u(x), x \in (0, 2\pi), \quad (8)$$

$$u'(2\pi) + Bu(2\pi) = 0, \quad (9)$$

$$u'(0) = 0,$$

где $u(x)$ – вектор-функция со значениями в $L_2(0, 2\pi)$.

Известно, что система $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iky} \right\}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ образует полный ортонормированный базис в $L_2(0, 2\pi)$. Тогда, почти всюду на $(0, 1)$ любой элемент $u(x) \in L_2(0, 2\pi)$ разлагается в ряд Фурье:

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[(u(x), u_{k1}) u_{k1} + (u(x), u_{k2}) u_{k2} \right],$$

где $\tilde{u}_{k1}(x) = (u(x), u_{k1})$ и $\tilde{u}_{k2}(x) = (u(x), u_{k2})$ – коэффициенты Фурье.

Тогда для операторов A и B имеют место следующие спектральные разложения.

$$Au = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left[(u(x), u_{k1}) u_{k1} + (u(x), u_{k2}) u_{k2} \right], u \in D(A),$$

$$Bu = \sum_{k=1}^{\infty} \left[-k(u(x), u_{k1}) u_{k1} + k(u(x), u_{k2}) u_{k2} \right], u \in D(B).$$

Учитывая выше приведенные спектральные разложения, задачу (8), (9) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
& -\sum_{k=1}^{\infty} \left[(u'', u_{k1}) u_{k1} + (u'', u_{k2}) u_{k2} \right] + \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left[(u, u_{k1}) u_{k1} + (u, u_{k2}) u_{k2} \right] = \\
& = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \left[(u, u_{k1}) u_{k1} + (u, u_{k2}) u_{k2} \right], \\
& \sum_{k=1}^{\infty} \left[(u'(2\pi), u_{k1}) u_{k1} + (u'(2\pi), u_{k2}) u_{k2} \right] + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left[-k(u(2\pi), u_{k1}) u_{k1} + k(u(2\pi), u_{k2}) u_{k2} \right] = 0, \\
& \sum_{k=1}^{\infty} \left[(u'(0), u_{k1}) u_{k1} + (u'(0), u_{k2}) u_{k2} \right] = 0.
\end{aligned}$$

Для коэффициентов $\tilde{u}_{k1}(x) = (u(x), u_{k1})$ получим следующую краевую задачу

$$-\tilde{u}_{k1}''(x) + k^2 \tilde{u}_{k1}(x) = \lambda \tilde{u}_{k1}(x), \quad x \in (0, 2\pi), \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_{k1}'(2\pi) - k \tilde{u}_{k1}(2\pi) &= 0, \\
\tilde{u}_{k1}'(0) &= 0,
\end{aligned} \quad (11)$$

а для коэффициентов $\tilde{u}_{k2}(x) = (u(x), u_{k2})$ получим следующую краевую задачу

$$-\tilde{u}_{k2}''(x) + k^2 \tilde{u}_{k2}(x) = \lambda \tilde{u}_{k2}(x), \quad x \in (0, 2\pi), \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_{k2}'(2\pi) + k \tilde{u}_{k2}(2\pi) &= 0, \\
\tilde{u}_{k2}'(0) &= 0.
\end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, нахождение собственных значений задач (1)–(3) сводится к нахождению собственных значений краевой задачи (10), (11) и (12), (13).

Сначала исследуем собственные значения краевой задачи (10), (11). Покажем что собственные значения задачи (10), (11) вещественные. Умножив уравнение (10) на функцию $\bar{\tilde{u}}_{k1}(x)$ и проинтегрировав на отрезке $[0, 2\pi]$, получим равенство

$$-\int_0^{2\pi} \tilde{u}_{k1}''(x) \bar{\tilde{u}}_{k1}(x) dx + k^2 \int_0^{2\pi} |\tilde{u}_{k1}(x)|^2 dx = \lambda \int_0^{2\pi} |\tilde{u}_{k1}(x)|^2 dx.$$

Интегрируя по частям получим

$$\begin{aligned}
& -\bar{\tilde{u}}_{k1}(2\pi) \cdot \tilde{u}_{k1}'(2\pi) + \bar{\tilde{u}}_{k1}(0) \cdot \tilde{u}_{k1}'(0) + \int_0^{2\pi} |\tilde{u}_{k1}'(x)|^2 dx + \\
& + k^2 \int_0^{2\pi} |\tilde{u}_{k1}(x)|^2 dx = \lambda \int_0^{2\pi} |\tilde{u}_{k1}(x)|^2 dx.
\end{aligned} \quad (14)$$

Используя краевые условия (11), из равенства (14) получим

$$-k|\tilde{u}_{k1}(2\pi)|^2 + \int_0^{2\pi} |\tilde{u}'_{k1}(x)|^2 dx + k^2 \int_0^{2\pi} |\tilde{u}_{k1}(x)|^2 dx = \lambda \int_0^{2\pi} |\tilde{u}_{k1}(x)|^2 dx,$$

из которого следует, что собственные значения задачи (10), (11) вещественные. Очевидно, что должно быть $\lambda \neq k^2$. Так как при $\lambda = k^2$ краевая задача (10), (11) имеет лишь тривиальное решение.

Теорема. Краевая задача (1)–(3) имеет одну серию собственных значений, которая асимптотически ведет себя как, $\lambda_{n,k} \sim k^2 + \frac{n^2}{4}$ при $n, k \rightarrow +\infty$.

Доказательство. Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения (10) имеет вид

$$\tilde{u}_{k1}(x) = c_1 e^{-x\sqrt{k^2-\lambda}} + c_2 e^{-(2\pi-x)\sqrt{k^2-\lambda}}, \quad (15)$$

где c_i ($i=1, 2$) – произвольные постоянные.

Подставив (15) в (11), получим систему относительно c_i , ($i=1,2$), определитель которой имеет вид:

$$D_k(\lambda) = \sqrt{k^2-\lambda} \left[-\left(\sqrt{k^2-\lambda}+k\right)e^{-4\pi\sqrt{k^2-\lambda}} + \left(\sqrt{k^2-\lambda}-k\right) \right] = 0.$$

Собственные значения краевой задачи (10), (11) состоят из тех вещественных $\lambda \neq k^2$, которые хотя бы при одном k удовлетворяют трансцендентному уравнению

$$D_k(\lambda) = 0. \quad (16)$$

Уравнение (16) эквивалентно уравнению

$$e^{4\pi\sqrt{k^2-\lambda}} \left(\sqrt{k^2-\lambda}-k \right) - \left(\sqrt{k^2-\lambda}+k \right) = 0. \quad (17)$$

Отыщем те собственные значения, которые удовлетворяют неравенству $\lambda < k^2$. Обозначим $\sqrt{k^2-\lambda} = y$, ($0 < y < k$). Тогда уравнение (17) принимает вид

$$e^{4\pi y} = \frac{y+k}{y-k}, \quad 0 < y < k. \quad (18)$$

Рассмотрим функции $f_k(y) = \frac{y+k}{y-k}$, $y \in (0, k)$. Очевидно, что для любого $k \in N$ и для любого $y \in (0, k)$, $f_k(y) < 0$. Поэтому графики функции $e^{4\pi y}$, $y \in (0, k)$ и $f_k(y)$ не пересекаются ни при каких k . Поэтому утверждаем, что уравнение (18) не имеет решений. Значит,

краевая задача (10), (11) не имеет собственных значений, удовлетворяющих условию $\lambda < k^2$. Исследуем теперь случай, когда $\lambda > k^2$. Перепишем уравнение (17) в виде

$$\sqrt{k^2 - \lambda} \operatorname{sh} 2\pi \sqrt{k^2 - \lambda} - k \operatorname{ch} 2\pi \sqrt{k^2 - \lambda} = 0. \quad (19)$$

Положим $2\pi \sqrt{\lambda - k^2} = z$, $z \in (0, +\infty)$. Тогда уравнение (19) принимает вид

$$\frac{z}{2\pi} \sin z + k \cos z = 0. \quad (20)$$

Пусть $z_n \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Тогда уравнение (20) эквивалентно уравнению

$$\operatorname{tg} z - \frac{2\pi k}{kz} = 0, \quad z \in (0, +\infty), \quad z_n \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (21)$$

Перепишем уравнению (21) в виде

$$\operatorname{tg} z = -\frac{2\pi k}{z}, \quad z \in (0, +\infty), \quad z \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (22)$$

Очевидно, что абсциссы точек пересечения кривых $f(z) = \operatorname{tg} z$, $z \in (0, +\infty)$, $z_n \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, ($n = 1, 2, \dots$) и $\psi_k(z) = -\frac{2\pi k}{z}$, $k = 1, 2, \dots$ будут искомыми корнями уравнения (24). В интервалах $\left(\frac{\pi}{2} + (n-1)\pi, n\pi\right)$, $n = 1, 2, \dots$ функция $\operatorname{tg} z$ принимает отрицательные значения. С другой стороны при каждом $k = 1, 2, \dots$ функция $\psi_k(z) = -\frac{2\pi k}{z}$ непрерывна, возрастает на интервале $\left(\frac{\pi}{2} + (n-1)\pi, n\pi\right)$, $n = 1, 2, \dots$ и положительная полуось оси абсцисс является горизонтальной асимптотой функции $\psi_k(z)$.

В каждом интервале $\left(\frac{\pi}{2} + (n-1)\pi, n\pi\right)$, $n = 1, 2, \dots$ и при каждом k графики функции $f(z) = \operatorname{tg} z$ и $\psi_k(z) = -\frac{2\pi k}{z}$ пересекается только лишь в одной точке $z_{n,k} : \frac{\pi}{2}(n-1)\pi < z_{n,k} < n\pi$ ($n = 1, 2, \dots$). Очевидно, что для каждого фиксированного k , при увеличении n , $z_{n,k}$ будет

приближаться к правому концу промежутка $\left(\frac{\pi}{2} + (n-1)\pi, n\pi\right)$, т.е., $z_{n,k} \sim n\pi$. Отсюда, для собственных значений получаем асимптотическую формулу

$$\lambda_{n,k}^{(1)} \sim k^2 + \frac{n^2}{4}, \quad k=1,2,\dots; n=N_0, N_0+1, \dots$$

где N_0 – некоторое натуральное число.

Аналогичным образом показывается что собственные значения краевой задачи (12), (13) вещественные и имеют одну серии собственных значений, которая асимптотически ведут себя как, $\lambda_{n,k}^{(2)} \sim k^2 + \frac{n^2}{4}$, при $n, k \rightarrow +\infty$.

Теорема доказана.

Список литературы

1. Якубов С. Я. Краевая задача для уравнения Лапласа с неклассической спектральной асимптотикой // Доклады Академии наук СССР. 1982. Т. 265, № 6. С. 1330–1333.
2. Алиев Б. А., Гусейнова Т. М. Асимптотическое поведение собственных значений одной краевой задачи для уравнения Лапласа // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : сб. ст. по материалам XVII Всерос. с междунар. участием науч.-техн. конф. (г. Пенза, Россия, 28 ноября – 3 декабря 2022 г.). Пенза : Изд-во ПГУ, 2022. С. 3–7.
3. Рыбак М. А. Об асимптотическом распределении собственных значений некоторых граничных задач для операторного уравнения Штурма – Лиувилля // Украинский математический журнал. 1980. Т. 32, № 2. С. 248–252.
4. Алиев Б. А. Асимптотическое поведение собственных значений одной краевой задачи для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка со спектральным параметром квадратично входящим в граничное условие // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54, № 9. С. 1282–1286.
5. Алиев Б. А. О неклассической асимптотике собственных значений одной краевой задачи для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58, № 12. С. 1587–1595.

РАСЧЕТ ФОТОННО-КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТИ

Даниил Вадимович Сошников¹, Димитрий Львович Головашкин²

^{1,2} Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С. П. Королева, Самара, Россия

^{1,2} Институт систем обработки РАН – филиал Научно-исследовательского
центра «Кристаллография и фотоника» РАН, Самара, Россия

¹soshnikov.d.v@mail.ru

Аннотация. Проведен синтез трехмерного фотонно-кристаллического волновода с использованием авторской модификации итерационного метода. Были найдены параметры искомой волноведущей структуры. Рассмотрен метод декомпозиции для моделирования трехмерного волновода.

Ключевые слова: волновод, фотонный кристалл, декомпозиция сеточной области, вычислительный эксперимент

CALCULATION OF A PHOTONIC CRYSTAL WAVEGUIDE USING THE DOMAIN DECOMPOSITION METHOD

Daniil V. Soshnikov¹, Dimitriy L. Golovashkin²

^{1,2} Samara National Research University named
after academician S. P. Korolev, Samara, Russia

^{1,2} Image Processing System Institute RAS – Branch of the Scientific
research center “Crystallography and Photonics” RAS,
Samara, Russia

¹soshnikov.d.v@mail.ru

Abstract. A three-dimensional photonic crystal waveguide was synthesized using the author's modification of the iterative method. The parameters of the desired waveguide structure were found. The decomposition method for modeling a three-dimensional waveguide is considered.

Keywords: waveguide, photonic crystal, decomposition of the grid region, computational experiment

Введение

Фотонно-кристаллические волноводы нашли широкое применение во многих областях оптики [1, 2]. Чтобы исследовать их свойства и характеристики используют компьютерное моделирование и один из самых популярных методов по моделированию распространения электромагнитных волн – FDTD метод. Однако при моделировании трехмерных областей, данный метод требует значительных объемов

памяти и затрат вычислительных ресурсов, это является крупным препятствием, для моделирования волновода даже небольшой длины.

Один из способов упростить вычисления и сократить объемы потребляемой памяти – это разбиение полной области вычисления на подобласти. Данный подход по декомпозиции актуален при моделировании длинных волноводов, так как нет необходимости пересчитывать поле в тех узлах, куда волна ещё не дошла и там, где волна уже устоялась. Поэтому длинный волновод можно разбить на множество подобластей и моделировать распространение волны в каждой подобласти по отдельности. После того как волна устоялась в одной подобласти, следует сохранить данные комплексной амплитуды (КА) в конце подобласти, и моделировать распространение в следующей подобласти используя падающую волну с той же КА, что и в конце предыдущей подобласти, тем самым согласовывая решение в этих двух подобластях. Если же в структуре присутствуют отраженные волны, то получив значение КА отраженной волны, можно вернуться обратно в предыдущую подобласть и промоделировать распространение отраженной волны. Такое возвращение обратно может выполняться несколько раз, пока не добьемся согласования между этими двумя подобластями [3].

Синтез трехмерного волновода

В первую очередь нужно найти такие параметры трехмерного волновода, чтобы он проводил ТЕ-волну (вектор магнитного поля направлен вдоль осей цилиндров) с $\lambda = 1,55$ мкм без потерь. Отметим, что волновод состоит из кремния (показатель преломления которого $n = 3,47$), а кристалл в нем формируется образованием воздушных ($n = 1$) отверстий, центры которых расположены в узлах гексагональной сетки. Один ряд этих отверстий убирается (дефект кристалла), в нем и будет происходить распространение волны. Толщина слоя кремния составляет $h = 220$ нм, и сам волновод располагается на подложке из стекла ($n = 1,44$), сверху граничит с воздухом (рис. 1). Необходимо отыскать период решетки волновода a и радиус протрава r .

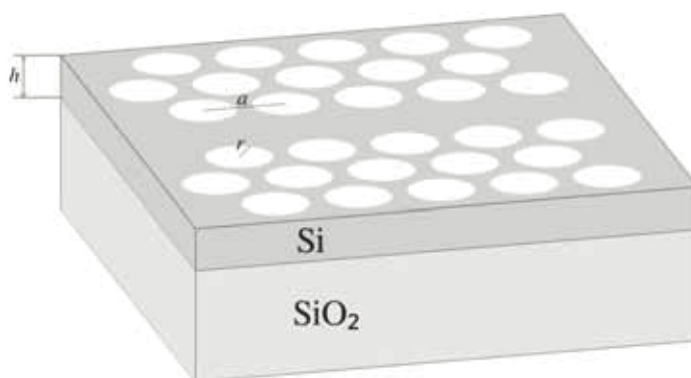


Рис. 1. Структура трехмерного волновода

Для поиска периода a и радиуса r воспользуемся итерационным методом, описанным в статье [4], только в отличие от данной статьи, высота волновода всегда остается фиксированной $h = 220$ нм.

Также для проведения каждой итерации необходимо моделировать довольно большой участок волновода, что является практически невозможным из-за огромного количества узлов сеточной области трехмерного случая и времени пересчета поля во всех этих узлах. Поэтому моделировать будем небольшой участок, размером 70 периодов. Волна на таком участке не успеет устояться, но мы будем предполагать, что та частота волны, падение интенсивности для которой самое медленное и будет той частотой, которая проводится данным волноводом наилучшим образом. Моделирование сопровождается с использованием пакета Ansys Lumerical 2020 – FDTD [5].

Начиная с параметров $a = 0,459$ мкм и $r = 0,1839$ мкм, и проделав 3 итерации данного метода, были получены следующие параметры волновода: период $a = 0,264$ мкм, радиус протрава $r = 0,1057$ мкм. Чтобы убедиться, что волна действительно распространяется в данном волноводе, как раз воспользуемся методом декомпозиции.

Декомпозиция сеточной области в пакете Lumerical

Отметим, что в пакете Ansys Lumerical 2020 – FDTD [5] отсутствует автоматическая возможность декомпозиции области, но данный эффект можно получить с помощью внутренних инструментов. Для этого создаются различные области в каждой из которых выполняется моделирование своей подобласти декомпозиции. В данной задаче будем моделировать прямой волновод без погрешностей изготовления, поэтому отраженной волны не будет. Во время декомпозиции повторное моделирование каждой из подобластей не производится, что значительно упрощает процесс моделирования.

Для подсчета КА поля воспользуемся встроенным инструментом: монитор frequency-domain field and power [5], который во время моделирования сразу выполняет разложение поля на частотные составляющие (для нашего случая интересна только одна частота $\lambda = 1,55$ мкм).

В ходе согласования подобластей, прошедшая волна из предыдущей подобласти будет представлена как падающая из следующей посредством источника: import [5], который испускает волну заданной частоты и с тем же профилем, который в него был загружен из предыдущего моделирования. Необходимо, чтобы данный источник располагался на том же месте, что и монитор в предыдущей подобласти. Для этого организуем наложение подобластей в небольшом пространстве, где и будут располагаться монитор и источник. На рис. 2 линия CD показывает расположение монитора для подобласти А и расположение источника для подобласти Б.

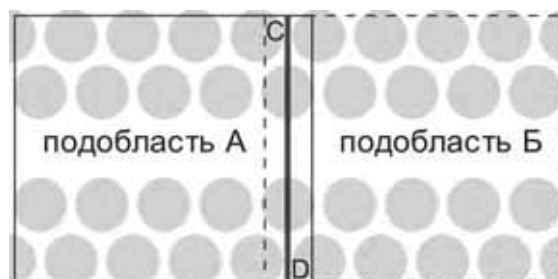


Рис. 2. Схема декомпозиции

Декомпозиция трехмерного волновода

Как будет показано далее, волна в таком волноводе довольно долго претерпевает изменения пока не устоится (в оптике это называют методом светящегося конца), поэтому общий размер волновода будет взят равным 720 периодов, ширина волновода будет 11 периодов, включая линейный дефект по центру. Декомпозиция будет происходить на более мелкие участки по 44 периода, т.е. полный волновод будет разбит на $G = 18$ подобластей.

Источник волны (на первой итерации – источник плоской ТЕ-волны, а на последующих уже источник волны загруженный из монитора предыдущей итерации) располагался на расстоянии $1a$ от левой границы PML, далее через каждый период располагались мониторы (40 штук), которые замеряли прошедшую энергию, а последний монитор ещё и сохранял КА компонент электромагнитного поля, чтобы передать эти данные в источник для следующей подобласти декомпозиции. Последний монитор находился на расстоянии $3a$ от правой границы PML. Общее время прохождения импульса одной подобласти составляло 2 пс, что соответствовало примерно 26 проходам волны через волновод туда и обратно.

Расстояния от нижней и верхней границы PML до слоя волновода составляло 1,49 мкм. Дискретизация вдоль волновода составило 886 узлов, по высоте 103 узла и по ширине 108 узлов.

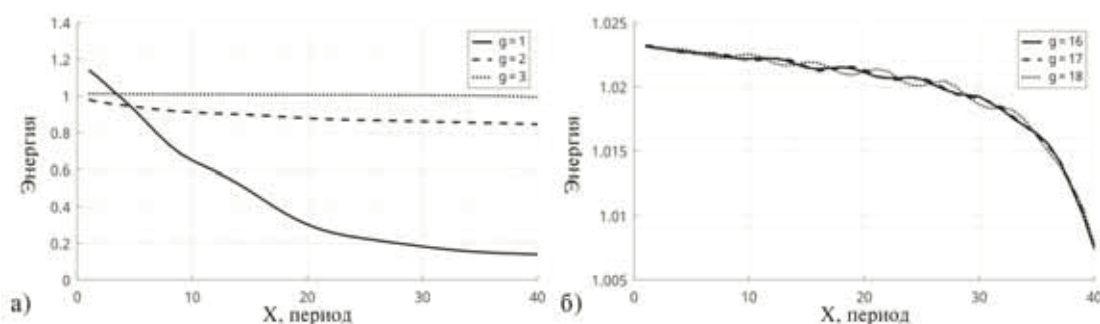


Рис. 3. Зависимость прошедшей энергии от расстояния в периодах:
а – для первых 3 прогонов; б – для последних 3 прогонов

На рис. 3,а видно, что волна не успевает так быстро устояться и заметны сильные потери в энергии, но уже к 3 прогону она приближается к постоянному значению. На рис. 3,б отметим, что волна устоялась и для последних 3 прогонов почти не отличается. Кроме того, на графике можно заметить некоторый спад энергии, который составляет 1,5 %, что можно объяснить незначительным влиянием отраженной волны от правой границы PML. Стоит ещё добавить что длительность моделирования одной подобласти составило 140 минут и длительность выделения памяти составляла около 1 минуты, в то время как длительность выделения памяти для полной области равна 25 минут, а прогнозируемая длительность вычислений составляла 42 дня, что подтверждает целесообразность моделирования волновода по частям, а не полностью.

Заключение

В данной работе модифицирован итерационный метод для расчета фотонно-кристаллической структуры из работы [4] и с помощью данного метода были найдены параметры гексагонального волновода (период и радиус протрава), который способен проводить волну $\lambda = 1,55$ мкм.

Представлено описание метода декомпозиции для программного пакета Ansys Lumerical, с помощью которого можно проводить разбиение полной области волновода на небольшие подобласти и более быстро и экономно по памяти рассчитывать распространение волны в данном волноводе, однако данный подход не может обеспечить декомпозицию для многочастотных волн, что вносит свои ограничения в решение данной задачи.

Проведена декомпозиция волновода при полученных параметрах, и синтезированный волновод показал хорошие характеристики, т.е. после того, как волна в нем устоялась, она распространялась в нем без потерь.

Список литературы

1. Pavelyev V., Krivosheeva Y., Golovashkin D. Genetic Optimization of the YShaped Photonic Crystal NOT Logic Gate // Photonics. 2023. № 10. P. 1173.
2. Burger S., Klose R., Schaedle A., Schmidt F., Zschiedrich L. FEM modeling of 3D photonic crystals and photonic crystal waveguides // Proc. SPIE 5728, Integrated Optics: Devices, Materials and Technologies IX. 2005. P. 164–173.
3. Головашкин Д. Л., Казанский Н. Л. Декомпозиция сеточной области при разностном решении уравнений Максвелла // Математическое моделирование. 2007. Т. 19, № 2. С. 48–58.
4. Mokshin P., Golovashkin D., Pavelyev V., Yablokova L. Iterative approach based on the FDTD method for the design of metal-dielectric photonic crystal devices // VIII International Conference on Information Technology and Nanotechnology (ITNT). 2022. P. 1–4.
5. Ansys Lumerical. URL : <https://www.lumerical.com/> (дата обращения: 25.10.23).

ПРЯМОЙ МЕТОД РАСЧЕТА ОТРАЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ОТ НЕЛИНЕЙНОГО СЛОЯ

Александр Михайлович Лерер¹, Ирина Николаевна Иванова²

^{1,2} Южный федеральный университет,
Ростов-на-Дону, Россия

¹ lerer@sfedu.ru

Аннотация. Приведено аналитическое решение краевых задач об отражении электромагнитной волны от диэлектрического слоя, покрытым нелинейным графеном и от нелинейного диэлектрического слоя.

Ключевые слова: графен, нелинейный диэлектрик, матрица рассеяния, численное решение трансцендентных уравнений

Финансирование: работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (государственное задание в области научной деятельности, № FENW-2022–0001).

DIRECT METHOD FOR CALCULATING THE REFLECTION OF AN ELECTROMAGNETIC WAVE FROM A NONLINEAR LAYER

Alexander M. Lerer¹, Irina N. Ivanova²

^{1,2} Southern Federal University,
Rostov-on-Don, Russia

¹ lerer@sfedu.ru

Abstract. An analytical solution of boundary value problems on the reflection of an electromagnetic wave from a dielectric layer covered with nonlinear graphene and from a nonlinear dielectric layer is given.

Keywords: graphene, nonlinear dielectric, scattering matrix, numerical solution of transcendental equations

Financing: the work was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (state assignment in the field of scientific activity, No. FENW-2022–0001).

Теоретически и экспериментально установлено, что графен обладает чрезвычайно сильной нелинейностью третьего порядка по сравнению с широко используемыми диэлектриками. Этим обусловлено появлению большого числа работ (в большинстве своем теоретических) по разработке нелинейных фотонных устройств [1–3].

Самым простым способом решение нелинейной задачи является метод возмущения – в (2) использовать напряженность электрического поля, полученную при решении линейной задачи. Однако, можно получить аналитическое решение простой задачи об отражении плоской электромагнитной волны от графенового слоя [4]. В настоящей работе этим методом решены две задачи об отражении электромагнитных волн.

Объекты исследования: линейный плоскопараллельный диэлектрический слой с нелинейным графеновым слоем на верхней границе; нелинейный диэлектрический слой.

Цель исследования: показать возможность аналитического решения задач отражения от этих объектов в сильных электромагнитных полях без привлечения метода возмущения.

1. Отражение электромагнитной волны от графенового слоя, лежащем на диэлектрическом слое.

Система координат – ось z перпендикулярна плоскопараллельному диэлектрическому слою толщиной h и диэлектрической проницаемостью ε_1 . Плоская электромагнитная волна падает под углом из $z = -\infty$. Плоскость падения $x = 0$. На нижней грани слоя с координатой $z = 0$ расположен графеновый слой. При $z \geq h$ подложка диэлектрической проницаемостью ε_2 . Поляризация волны вдоль оси x – $\vec{E} = E\vec{e}_x$. Решение ортогональной поляризации аналогично.

Граничные условия (ГУ) – 1) непрерывность E на всех границах, в том числе на бесконечно тонком графеновом слое; 2) непрерывность компоненты магнитного поля H_y при $z = h$; 3) импедансное ГУ на графене $j(y) = \sigma E(y, 0)$, где $j(y)$, σ проводимость – $\sigma(E_g) = \sigma_1 + \sigma_3 |E_g|^2$; E_g – напряженность электрического поля на графене.

Нетрудно получить решение уравнение Гельмгольца для поля в диэлектрике, удовлетворяющее первому ГУ

$$E(y, z) = E_0 \left\{ \begin{array}{l} \exp[i(-k_{z,1}z + k_{y,1}y)] \exp(i\omega t) + \sum_{j=1,3} (A_j - \delta_{j,1}) \exp[i(k_{z,j}z + k_{y,j}y)] \exp(ij\omega t), z \leq 0 \\ \sum_{j=1,3} \frac{1}{\sin \gamma_{1,j} h} [A_j \sin \gamma_{1,j} (h - z) + T_j \sin \gamma_{1,j} z] \exp(ik_{y,j}y) \exp(ij\omega t), 0 \leq z \leq h \\ \sum_{j=1,3} T_j \exp[-i\gamma_{2,j} (z - h) + ik_{y,j}y] \exp(ij\omega t), z \geq h \end{array} \right\},$$

где E_0 амплитуда падающей волны, $k_{y,1} = k_1 \sin \alpha$, $k_{y,3} = k_{y,1}$, $k_{y,1} = k_1 \sin \alpha$, $k_{z,j} = \sqrt{k_j^2 - k_{y,1}^2}$, $\gamma_{\{1\},j} = \sqrt{k_j^2 \varepsilon_{\{1\}} - k_{y,1}^2}$.

Удовлетворив второму ГУ, выразим неизвестные коэффициенты A_j через искомый коэффициент прохождения T_j

$$A_j = U_j T_j, \quad U_j = \cos \gamma_{1,j} h + \frac{i\gamma_{2,j}}{\gamma_{1,j}} \sin \gamma_{1,j} h.$$

Наконец, удовлетворив третьему ГУ получим

$$-\frac{1}{Z_0} \left\{ \frac{k_{z,1}}{k_1} - \sum_{j=1,3} (T_j U_j - \delta_{j,1}) \frac{k_{z,j}}{k_j} \exp(ij\omega t) - i \sum_{j=1,3} T_j V_j \exp(ij\omega t) \right\} = \quad (1)$$

$$= \sigma \left[\exp(i\omega t) + \sum_{j=1,3} (T_j U_j - \delta_{j,1}) \exp(ij\omega t) \right],$$

где

$$V_j = \frac{\gamma_{1,j}}{k_j} \left[- \left(\frac{i\gamma_{2,j}}{\gamma_{1,j}} \right) \cos \gamma_{1,j} h + \sin \gamma_{1,j} h \right]$$

Из ГУ для основной гармоники после элементарных преобразований получим

$$T_1 \left[U_1 \left(1 - \sigma \frac{k_1}{k_{z,1}} \right) + i V_1 \frac{k_1}{k_{z,1}} \right] = 2. \quad (2)$$

при

$$\sigma(|T_1|) = \sigma_1 + \sigma_3 \frac{3}{4} \left[E_0^2 [|U_1| |T_1|]^2 \right]. \quad (3)$$

Из (1) следует

$$|T_1| \left[U_1 \left(1 - \sigma(|T_1|) \frac{k_1}{k_{z,1}} \right) + i V_1 \frac{k_1}{k_{z,1}} \right] = 2. \quad (4)$$

Уравнение (4) с проводимостью (3) – трансцендентное уравнение относительно неизвестной $|T_1|$. Решение находим численно, потом находим $\sigma(|T_1|)$ из (3), затем из (2) комплексный коэффициент прохождения T_1 и коэффициент отражения $R_1 = U_1 T_1 - 1$. Зная T_1 , из (1) находим коэффициенты для третьей гармоники T_3, R_3 .

В качестве примера расчета рассмотрим отражение гауссова импульса длительностью $\tau = 0.1$ нс, с несущей частотой 1 ТГц (рис. 1). Параметры диэлектрика $\varepsilon_1 = 2$, $\varepsilon_2 = 4$, $h = 26.5$ мкм. Параметры графена – химпотенциал 0.25 эВ, температура 300 °К, время релаксации 1 пс. Угол падения 0°. $R_{1,3}$ коэффициенты отражения по мощности первой и третьей гармоник.

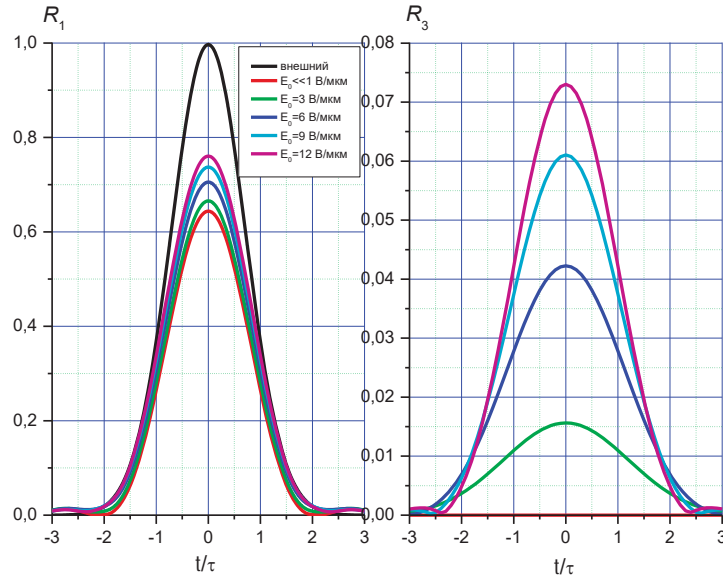


Рис. 1. Отражение от графенового слоя

2. Отражение от нелинейного диэлектрического слоя. Само-воздействие.

Структура, аналогичная описанной выше, но без графена, а в слое толщиной h диэлектрик с квадратичной нелинейностью.

Решение представим в виде

$$E(y, z) = E_0 \begin{cases} \left[\exp(-ik_z z) + R \exp(ik_z z) \right], z \leq 0, \\ T U_+(z, |T|), z \geq 0, \end{cases} \exp(ik_y y).$$

На данном этапе считаем функцию $U_+(z, |T|)$ известной. Способ ее нахождения опишем ниже в разделе 3. Будем считать, что $U_+(0, |T|) = 1$.

Удовлетворяя ГУ при $z = 0$, получим

$$1 + R = T, 1 - R = T\eta, \quad (5)$$

$$\eta(|T|) = iU'_+(0, |T|)/k_z, \quad (6)$$

где штрих – производная по z .

Отсюда получим

$$T[1 + \eta(|T|)] - 2 = 0. \quad (6)$$

Решаем численно трансцендентное уравнение относительно неизвестной $|T|$

$$|T|[1 + \eta(|T|)] - 2 = 0.$$

Затем из (5) находим зависящие от амплитуды поля коэффициенты R, T .

Реализован также метод последовательных приближений для решения (6) при больших амплитудах волны. Полагаем $E_0^{(p)} = E_0 \frac{P}{P}$. Решаем (6) за P шагов [5].

$$T^{(p)} = \frac{2}{1 + \eta(T^{(p-1)})}, p = 1, 2, \dots, P,$$

где $T^{(p)}$ решение при $E_0^{(p)}$, $T^{(0)}$ линейное решение.

Полученный алгоритм быстро сходится по количеству шагов P . Оба метода дают одинаковое решение даже при больших амплитудах поля.

3. Построение функции $U_+(z, |T|)$

Разобьем слой на N слоев. Толщина слоев одинаковая h_n . Считаем, что в пределах слоя ε_n постоянная, зависящая от напряженности поля в центре слоя. Слой $N+1$ – полубесконечная линейная подложка.

Обозначим $z_n = \sum_{m=1}^n h_m$.

В этом случае решение запишем в виде

$$U_+(z) = \begin{cases} \frac{1}{\sin \gamma_n h_n} [A_n \sin \gamma_n (z_n - z) + A_{n+1} \sin \gamma_n (z - z_{n-1})], n = 1, 2, \dots, N \\ A_{N+1} \exp[-i\gamma_{N+1}(z - z_N)] \end{cases},$$

$$\gamma_n = \sqrt{k^2 \varepsilon_n - k_y^2}.$$

Это решение удовлетворяет условию непрерывности на границах раздела слоев. Из условия непрерывности нормальных производных получим рекуррентную схему для определения неизвестных $A_n = \tilde{A}_n / \tilde{A}_1$

$$\tilde{A}_n = Q_n^{-1} [\tilde{A}_{n+1} (P_n + P_{n+1}) - \tilde{A}_{n+2} Q_{n+1}], n = N, N-1, \dots, 1, \tilde{A}_{N+2} = 0, \tilde{A}_{N+1} = 1,$$

$$Q_n = \frac{\gamma_n}{\sin \gamma_n h_n}, P_n = \gamma_n \operatorname{ctg} \gamma_n h_n, n = 1, \dots, N, P_{N+1} = -i\bar{\gamma}_{N+1}.$$

Определив все A_n находим поле в центре слоя

$$E(z_n + h_n / 2) = E_0 T U_+(z_n + h_n / 2) = E_0 T [A_n + A_{n+1}] / \left[2 \cos \frac{\gamma_n h_n}{2} \right],$$

а затем нелинейную диэлектрическую проницаемость

$$\varepsilon_n = \varepsilon_{lin} + \chi |E(z_n + h_n / 2)|^2,$$

где ε_{lin} – линейная диэлектрическая проницаемость.

Полученный алгоритм быстро сходится по количеству разбиений N .

Некоторые результаты для четвертьволнового слоя представлены на рис. 2. Толщина слоя 3.536 мм, равная четверть длины волны при $\lambda = 20$ мм, $\varepsilon_{lin} = 2$, диэлектрическая проницаемость подложки 4. Нормальное падение. $U_0 = E_0 \sqrt{3\chi} / 2$ нормированная амплитуда поля.

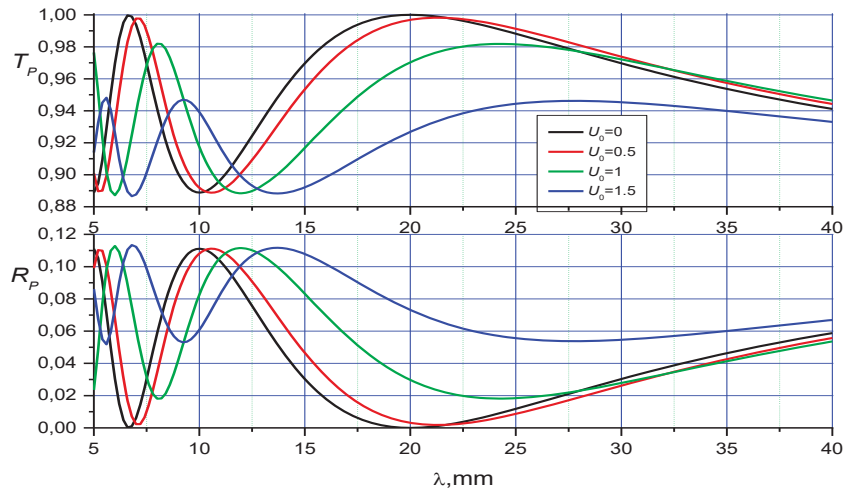


Рис. 2. Отражение от нелинейного слоя. R_p, T_p – коэффициенты отражения и пропускания по мощности.

Список литературы

1. Mikhailov S. A. Non-linear electromagnetic response of graphene // Europhys. Lett. 2007. Vol. 79. P. 27002.
2. Mikhailov S. A., Ziegler K. Nonlinear electromagnetic response of graphene: Frequency multiplication and the self-consistent-field effects // J. Phys. Condens. Matter. 2008. Vol. 20. P. 384204.
3. Hendry E., Hale P. J., Moger J., Savchenko A. K., Mikhailov S. A. Coherent Nonlinear Optical Response of Graphene // Phys. Rev. Lett. 2010. Vol. 105. P. 097401.
4. Лерер А. М. Численная оценка погрешности метода возмущения при решении задачи об отражении электромагнитной волны от нелинейного графенового слоя // Радиотехника и электроника. 2022. Т. 67, № 9. С. 855–858.
5. Kalinchenko G. A., Lerer A. A simple numerical method for the electromagnetic waves propagation in non-linear dielectric waveguides // J. of electromagnetic Waves and Application. 1999. Vol. 13, № 11. P. 1539–1552.

ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ И ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕЗОНАНСНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МИКРОВОЛНОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ С 3D-МАГНИТНЫМИ НАНОКОМПОЗИТАМИ

Галина Степановна Макеева

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

radiotech@pnzgu.ru

Аннотация. На базе детерминированной электродинамической модели разработана вероятностная модель в магнитных 3D-нанокompозитах на основе опаловых матриц, с учетом того, что магнитное поле микроволнового ферромагнитного резонанса каждой из магнитных наночастиц является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Получены результаты расчета значений математического ожидания случайных величин действительной и мнимой частей диагонального и недиагонального компонента тензора эффективной магнитной проницаемости магнитного 3D-нанокompозита в зависимости от напряженности поля подмагничивания для нескольких значений параметра диссипации магнитных наночастиц при различных значениях среднеквадратического отклонения случайной величины магнитного поля микроволнового ферромагнитного резонанса наночастиц на частоте $f = 26$ ГГц. Проведено сравнение результатов с экспериментом.

Ключевые слова: микроволновое излучение, магнитный 3D-нанокompозит, опаловые матрицы, магнитные наночастицы, детерминированная электродинамическая модель, вероятностная модель, случайная величина

PROBABILISTIC MODEL AND ELECTRODYNAMIC ANALYSIS OF RESONANT INTERACTION OF MICROWAVE RADIATION WITH 3D MAGNETIC NANOCOMPOSITES

Galina S. Makeeva

Penza State University, Penza, Russia

radiotech@pnzgu.ru

Abstract. On the basis of a deterministic electrodynamic model a probabilistic model of microwave ferromagnetic resonance (FMR) in magnetic 3D nanocomposites based on opal matrices has been developed, assuming that the FMR magnetic field of each of the magnetic nanoparticles (MNPs) is a random variable distributed according to the normal law. The results of calculating the values of the mathematical expectation of random values of the real and imaginary parts of the diagonal and off-diagonal components of the effective magnetic permeability

tensor of a magnetic 3D nanocomposite depending on the strength of the bias field for several values of the dissipation parameter of MNPs at different values of the root-mean-square deviation of the random value of the magnetic field of the FMR nanoparticles at the frequency $f = 26$ GHz were obtained. The results were compared with the experiment.

Keywords: microwave radiation, 3D magnetic nanocomposite, opal matrices, magnetic nanoparticles, deterministic electrodynamic model, probabilistic model, random variable

1. Вероятностная модель

Одним из способов управления физическими свойствами нанокompозитов, созданных на основе опаловых матриц (ОМ), является действие магнитного поля на наночастицы магнитоупорядоченных материалов, внедренные в межсферное пространство ОМ. Основное внимание вызывает область частот и магнитных полей вблизи условий ферромагнитного резонанса (ФМР), что создает предпосылки использования этого класса материалов в управляемых устройствах СВЧ.

При исследовании 3D магнитных нанокompозитов получен целый ряд теоретических и экспериментальных результатов на основе волноводных и резонансных измерений микроволнового ФМР [1]. Ферромагнитный резонанс является проверенным, эффективным и достаточно простым для реализации методом исследования ансамблей магнитных наночастиц (МНЧ) [2]. Основанный на изучении резонансного поглощения микроволнового излучения магнитным веществом метод позволяет получить данные о внутренних полях, действующих на магнитный момент МНЧ.

На рис. 1. показана модель магнитного 3D нанокompозита на основе ОМ из диэлектрических SiO_2 наносфер, содержащего МНЧ, внедренные в межсферное пространство ОМ, который рассматриваем как квазипериодическую 3D наноструктуру с геометрическими размерами ячейки a, b, c .

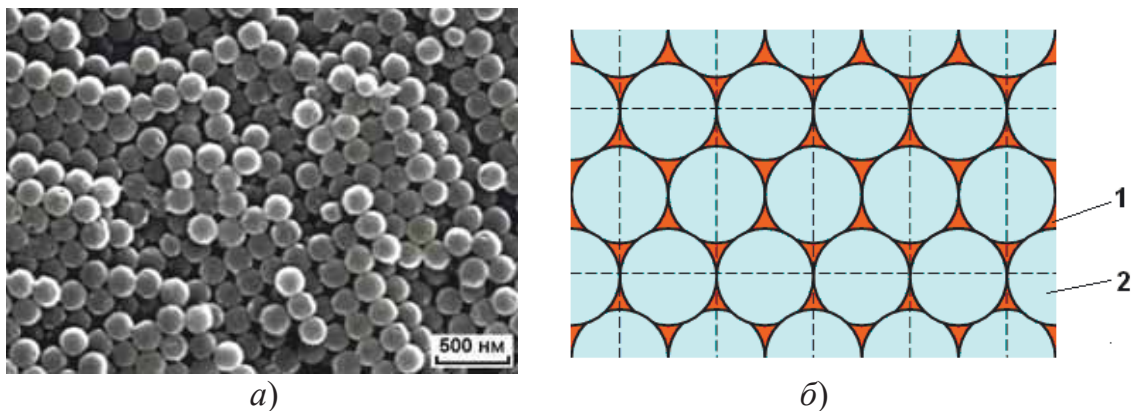


Рис. 1. Модель магнитного 3D нанокompозита на основе ОМ:

a – ОМ из наносфер SiO_2 [1]; b – разбиение магнитного 3D нанокompозита на автономные блоки с каналами Флоке (ФАБ): 1 – область МНЧ; 2 – наносферы SiO_2

В реальных магнитных нанокompозитах частицы введенных в межсферические пустоты ОМ магнитных фаз имеют поликристаллическую структуру и характеризуются неправильной формой с размерами от 5 до 70 нм [2]. Для примера на рис. 2 показано темнопольное изображение структуры магнитного 3D нанокompозита с МНЧ кобальт-цинкового феррита-шпинели, полученное в сканирующий электронный микроскоп.

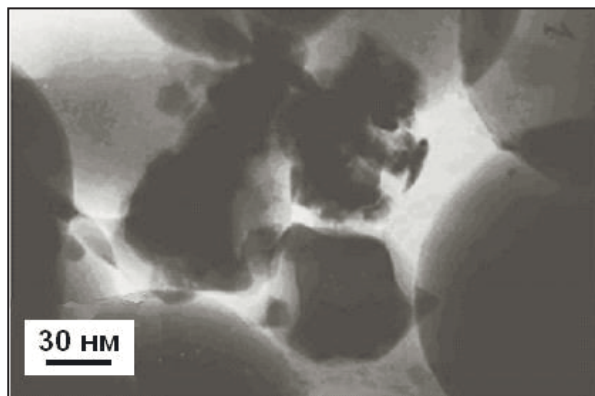


Рис. 2. Реальная структура магнитного 3D нанокompозита на основе ОМ с МНЧ никель-цинковой шпинели [1]

Реальный магнитный нанокompозит обычно состоит из множества случайным образом ориентированных МНЧ, различающихся величиной и формой, т.е. представляет собой неоднородную и довольно сложную магнитную наносистему. Резонансные спектры (т.е. зависимости поглощения от поля) характеризуются существенными особенностями, в частности, резонансные линии ФМР имеют большую ширину, чем в монокристаллах [3]. Причины этих особенностей следует искать в магнитной анизотропии и внутренних размагничивающих полях [4–8].

Характеристики линии ФМР, такие как значение поля резонанса, ширина и форма линии, зависят от размера и формы МНЧ [5, 7, 9]. Наличие поверхностной анизотропии вызывает смещение резонансной частоты (резонансного поля); величина и знак смещения резонансного поля зависят от ориентации оси МНЧ относительно поля подмагничивания [8].

Теории ФМР в ультрадисперсных средах [10–13] могут быть разделены на две различных группы. Один подход использует предположение о том, что отдельные МНЧ можно рассматривать как независимые [10–12]. Частота ФМР отдельно взятой МНЧ зависит от ее геометрической формы, размера и может существенно изменяться от частицы к частице. В итоге каждая МНЧ имеет свою резонансную частоту.

Влияние окружения проявляется только глобально, посредством определенной модификации индивидуальных резонансных условий МНЧ. Кривая резонансного поглощения системы определяется как

суперпозиция резонансных кривых отдельных МНЧ. Ширина резонансной кривой магнитного нанокompозита в целом будет определяться суммарными резонансными кривыми МНЧ и их магнитными потерями. Такой подход, очевидно, оправдан только тогда, когда дипольное взаимодействие между магнитными моментами МНЧ сравнительно слабое.

Альтернативными являются теории [13], где весь образец рассматривается как единая магнитная наносистема. Они применяются в тех случаях, когда дипольное взаимодействие между МНЧ очень сильно и преодолевает анизотропию (отдельные осцилляторы синхронизируются вследствие сильной связи).

В 3D магнитных нанокompозитах на основе ОМ следует учитывать магнитостатическое диполь-дипольное взаимодействие отдельных МНЧ, а также обменное взаимодействие [14], что превращает образец в систему из большого числа связанных резонаторов. В итоге теоретическая интерпретация получаемых экспериментальных данных по ФМР в системах МНЧ с учетом флуктуаций становится сложной задачей.

Для анализа эффективных электромагнитных параметров магнитного нанокompозита в целом и для изучения свойств отдельных МНЧ необходимы вероятностные теоретические модели резонансного взаимодействия микроволнового излучения с 3D магнитными нанокompозитами на основе ОМ, обеспечивающие адекватную интерпретацию результатов измерений.

Вероятностную модель микроволнового ФМР в магнитных 3D нанокompозитах создаем следующим образом. Полагаем, что магнитное поле ФМР H_r каждой из МНЧ, находящихся в межсферической полости ФАБ (рис. 2), является случайной величиной. Распределение резонансных полей может быть вызвано случайным отклонением размагничивающего фактора МНЧ от среднего значения или случайными вариациями намагниченности материала МНЧ. Будем считать, что случайная величина H_r распределена по нормальному закону [15]:

$$f(H_r) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(H_r - H_r^0)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (5.13)$$

где $f(H_r)$ – плотность вероятности; H_r^0 – математическое ожидание случайной величины H_r ; σ – среднеквадратическое отклонение. В данной работе ограничиваемся случаем малых отклонений от среднего $\sigma \ll H_r^0$.

Вероятностная модель является имитационной. Используем генератор случайных чисел, распределенных по нормальному закону, для имитации случайной величины H_r (резонансного магнитного поля H_r каждой из МНЧ в полости ОМ). Для того, чтобы определить реализации случайных функций, в вероятностной модели учитываем распределение случайной величины H_r , полученное из имитации.

На первом этапе, используя детерминированную электродинамическую модель, определяем диагональную μ^Σ и недиагональную μ_α^Σ компоненты тензора эффективной магнитной проницаемости и диэлектрической проницаемости ε^Σ 3D магнитного нанокompозита как функции поля подмагничивания H_0 , применяя метод ФАБ [16]. На втором этапе в вероятностной модели определяем реализации случайных функций $\mu^\Sigma(H_r)$, $\mu_\alpha^\Sigma(H_r)$, учитывая нормальное распределение случайной величины H_r , полученное из имитации. Затем по реализациям случайных функций $\mu^\Sigma(H_r)$, $\mu_\alpha^\Sigma(H_r)$ определяем математические ожидания [15] случайных величин μ^Σ , μ_α^Σ .

2. Результаты вероятностного расчета компонентов тензора эффективной магнитной проницаемости магнитного 3D нанокompозита

При помощи разработанного вероятностного вычислительного алгоритма проведено математическое моделирование резонансного взаимодействия микроволнового излучения с 3D магнитными нанокompозитами на основе ОМ. Вероятностная модель построена на базе детерминированной электродинамической модели.

Магнитный 3D нанокompозит на основе ОМ (рис. 1,б), состоящей из диэлектрических наносфер SiO_2 (радиус наносфер $r = 100$ нм, относительные комплексная диэлектрическая и магнитная проницаемости $\varepsilon_v = 4,6 - 4 \cdot 10^{-4}$, $\mu_v = 1$); материал МНЧ феррит $\text{Ni}_{0.7}\text{Zn}_{0.3}\text{Fe}_2\text{O}_4$ (намагниченность насыщения $4\pi M_S = 5000$ Гс, константа обменного взаимодействия $\mu_0 q = 2,2 \cdot 10^{-9}$ Э·см², комплексная диэлектрическая проницаемость $\hat{\varepsilon} = 9,5 - i0,3$). В модели октаэдрические межсферические полости ОМ (рис. 1,б) заполнены N МНЧ сферической геометрии одинакового диаметра d ; число N учитываемых МНЧ в ячейке периодической 3D наноструктуры $N = 4$ ($d = 31$ нм); коэффициент заполнения p межсферической полости МНЧ $p = 0,07$.

Результаты расчета значений математического ожидания случайных величин $\text{Re} \mu^\Sigma$, $\text{Im} \mu^\Sigma$, $\text{Re} \mu_\alpha^\Sigma$, $\text{Im} \mu_\alpha^\Sigma$ (действительной и мнимой частей μ^Σ и μ_α^Σ) диагональной μ^Σ и недиагональной μ_α^Σ компонент тензора эффективной магнитной проницаемости магнитного 3D нанокompозита в зависимости от напряженности поля подмагничивания H_0 для нескольких значений параметра диссипации МНЧ α ($\alpha = 0,08$; $0,05$; $0,03$) при различных значениях среднеквадратического отклонения σ случайной величины магнитного поля ФМР наночастиц H_r на частоте $f = 26$ ГГц показаны на рис. 3,а–в. Для сравнения на рис. 3 приведены также экспериментальные зависимости, обозначенные точками [17].

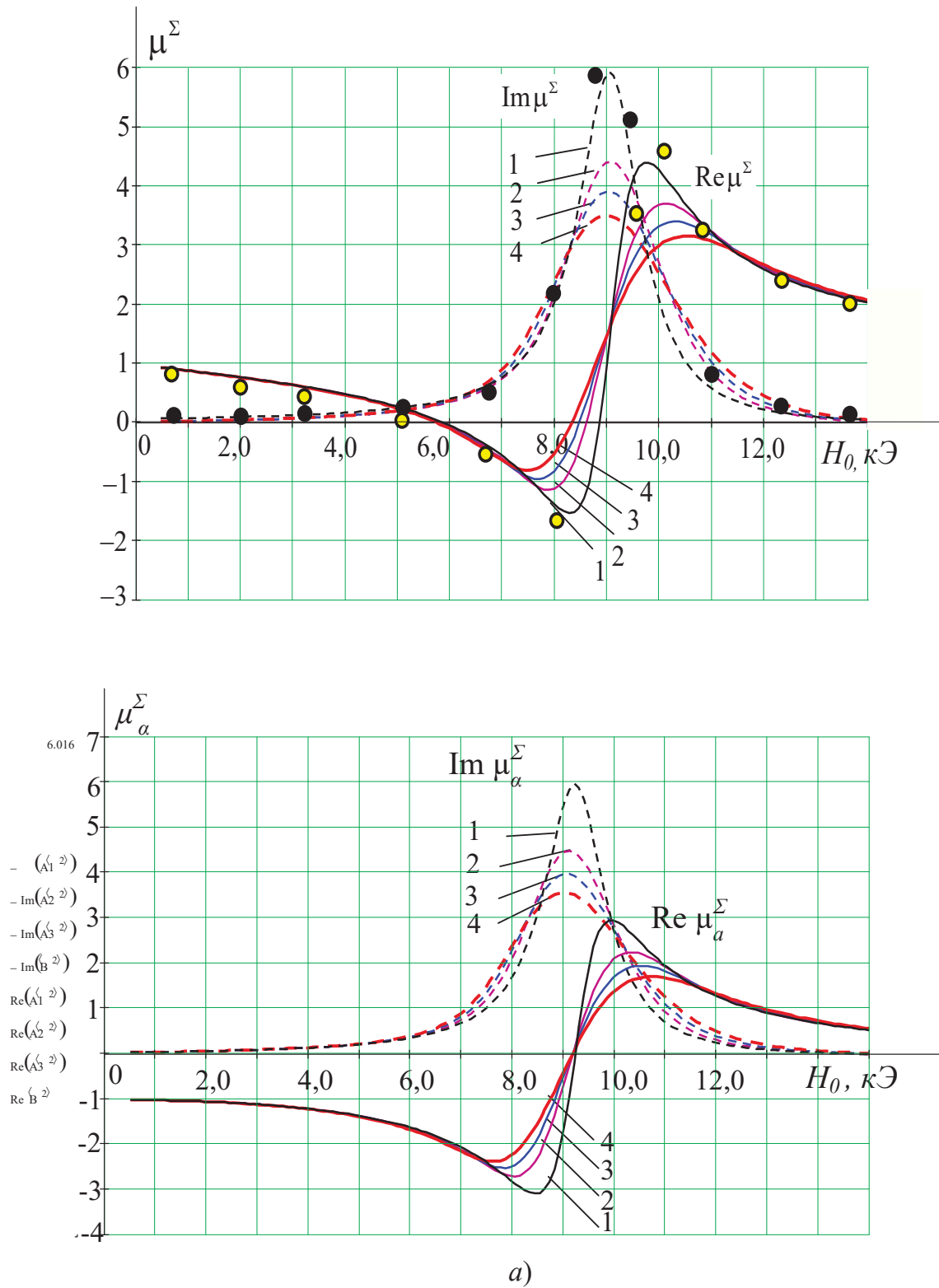
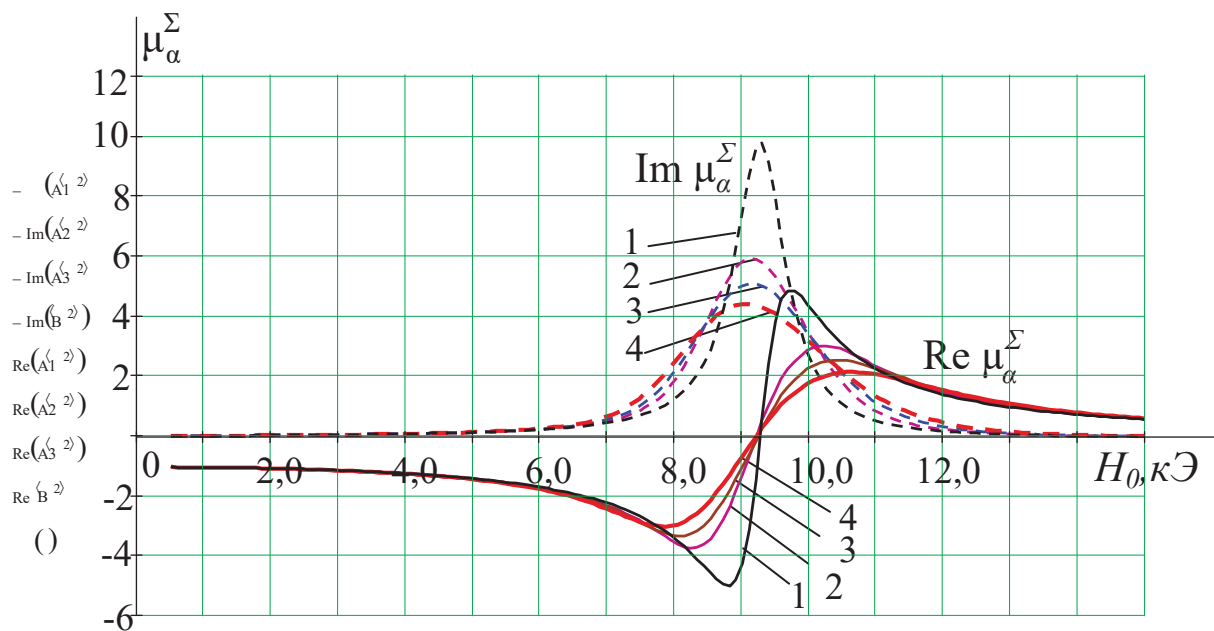
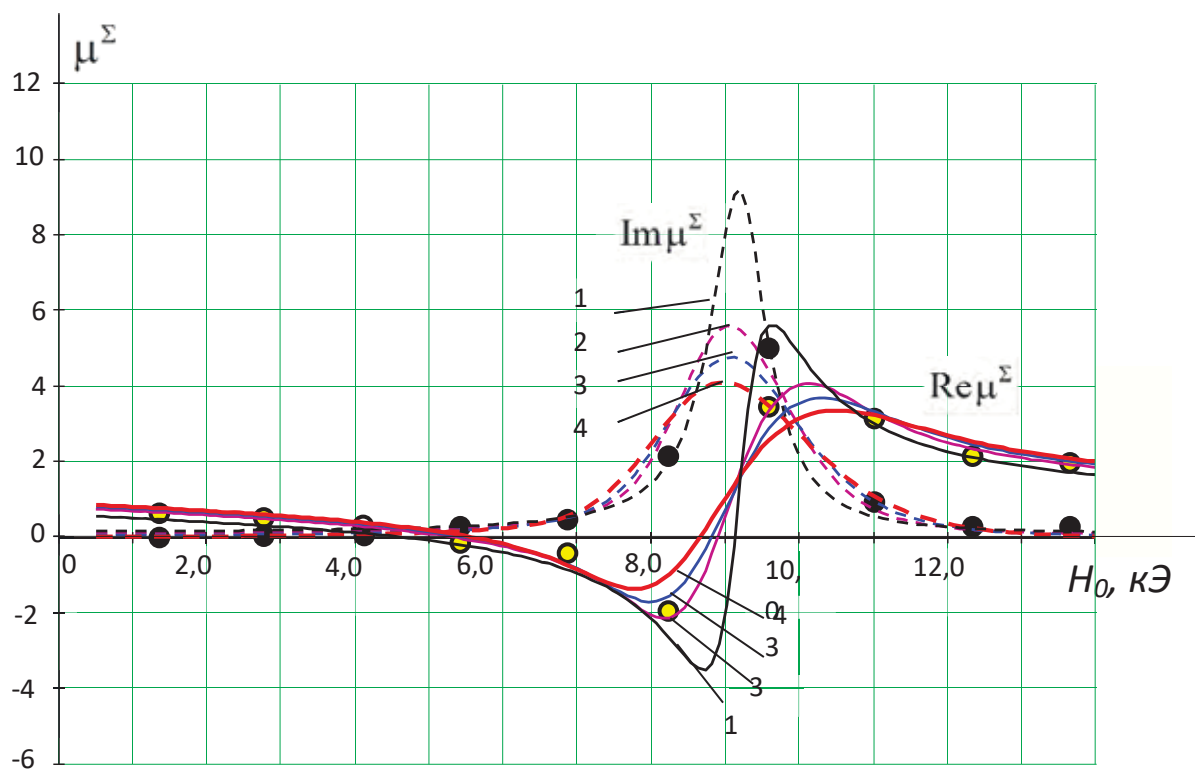


Рис. 3. Зависимости действительной и мнимой частей $\text{Re} \mu^\Sigma$, $\text{Im} \mu^\Sigma$ диагональной μ^Σ и $\text{Re} \mu_a^\Sigma$, $\text{Im} \mu_a^\Sigma$ недиагональной μ_a^Σ компонент тензора эффективной магнитной проницаемости магнитного 3D нанокомпозита от напряженности поля подмагничивания H_0 : $f = 26$ ГГц;
 $a - \alpha = 0,08$, $H_r^0 = 9180 \text{ Э}$; $b - \alpha = 0,05$, $H_r^0 = 9230 \text{ Э}$; $b - \alpha = 0,03$, $H_r^0 = 9250 \text{ Э}$;
 кривая 1 – $\sigma = 0$; 2 – $\sigma = 535 \text{ Э}$; 3 – $\sigma = 722 \text{ Э}$; 4 – $\sigma = 895 \text{ Э}$; кривые – расчет (вероятностная модель), \bullet -- эксперимент [17] (начало)



б)

Рис. 3. Продолжение

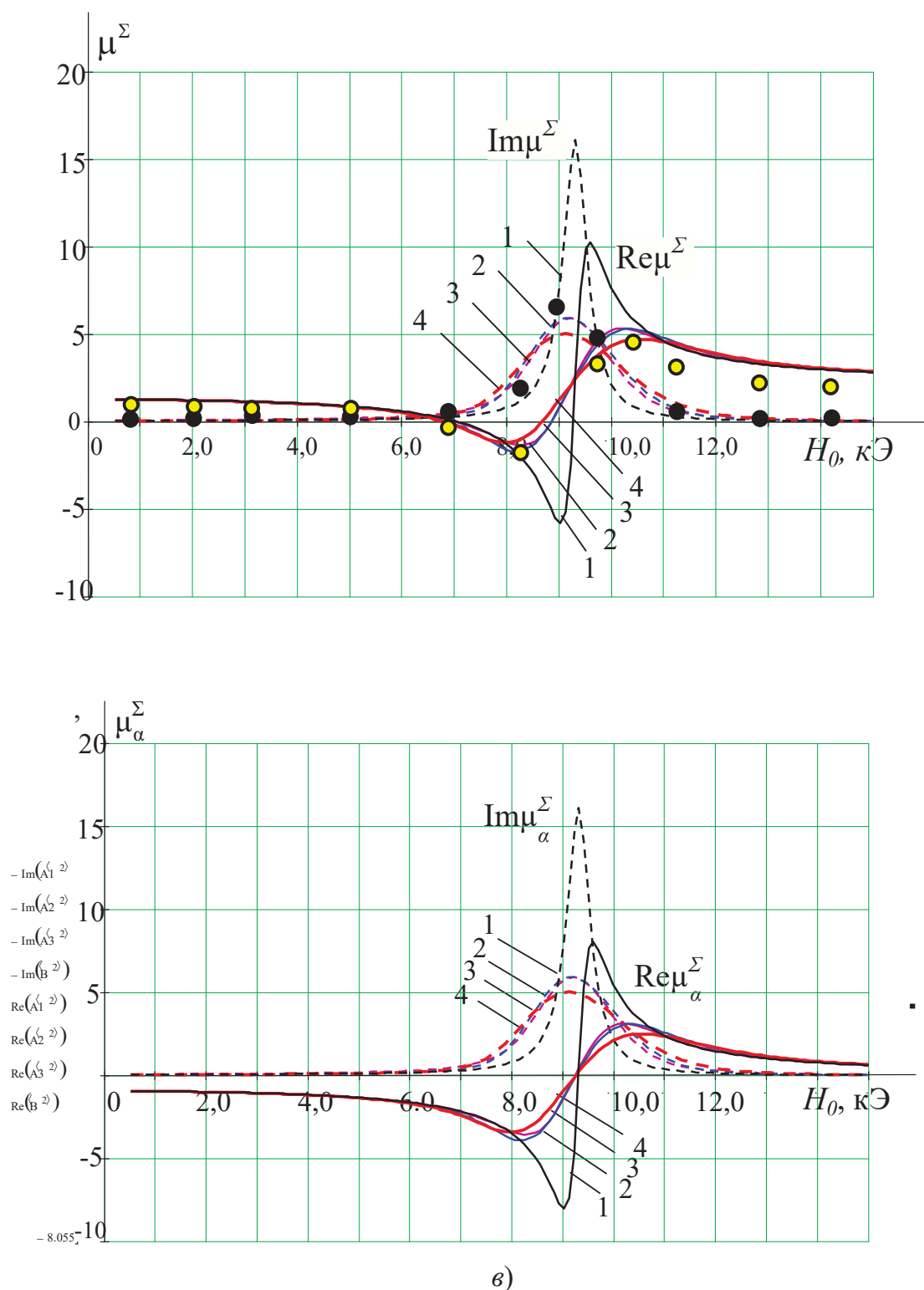


Рис. 3. Окончание

Кривые 1–4 (рис. 3) иллюстрируют изменение ширины ΔH и формы резонансных кривых при изменении параметров α и σ , учитывающих пространственные магнитные неоднородности.

Результаты математического моделирования (рис. 3) показывают, что расчетные характеристики ФМР, такие как значение резонансного

поля, ширина ΔH и форма резонансных кривых (рис. 3 кривые 1–4) для значений α ($\alpha = 0,08; 0,05; 0,03$) соответствуют эксперименту [17] только при определенных значениях расчетного параметра σ ($\sigma = 0, 535 \text{ Э}, 722 \text{ Э}$, соответственно). В первом случае (кривая 1 рис. 3,а) ширина кривой ФМР ΔH обусловлена только достаточно большими магнитными потерями каждой из МНЧ $\alpha = 0,08$ (при этом $\sigma = 0$). Во всех других случаях (кривые 2, 3 рис. 3,б–в) ширина кривых ФМР ΔH определяется как магнитными потерями α МНЧ, так и среднеквадратическим отклонением σ , и чем меньше значение α ($\alpha = 0,05; 0,03$), тем при больших значениях расчетного параметра σ ($\sigma = 535 \text{ Э}, 722 \text{ Э}$, соответственно) результаты расчета соответствуют экспериментальным зависимостям [17]. Ширина ΔH расчетных резонансных кривых ФМР возрастает монотонно с увеличением σ (кривые 2–4 рис. 3 для $\sigma = 535 \text{ Э}, 722 \text{ Э}, 893 \text{ Э}$).

На рис. 4 представлены для сравнения результаты расчетов, полученные на основе вероятностной ($\sigma \neq 0$) и детерминированной ($\sigma = 0$) моделей, зависимостей $\text{Re} \mu^\Sigma$, $\text{Im} \mu^\Sigma$, $\text{Re} \mu_a^\Sigma$, $\text{Im} \mu_a^\Sigma$ от напряженности поля подмагничивания H_0 для $\alpha = 0,006$; остальные параметры магнитного 3D нанокompозита те же, что и на рис. 3. (На рис. 3 приведены также обозначенные точками результаты эксперимента [17]).

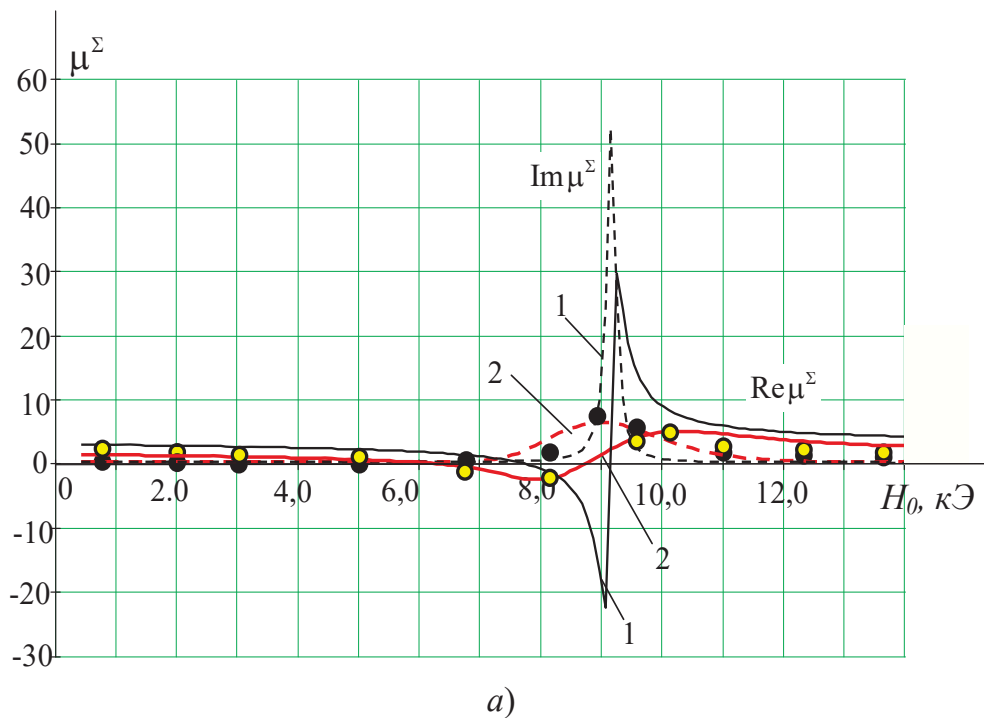
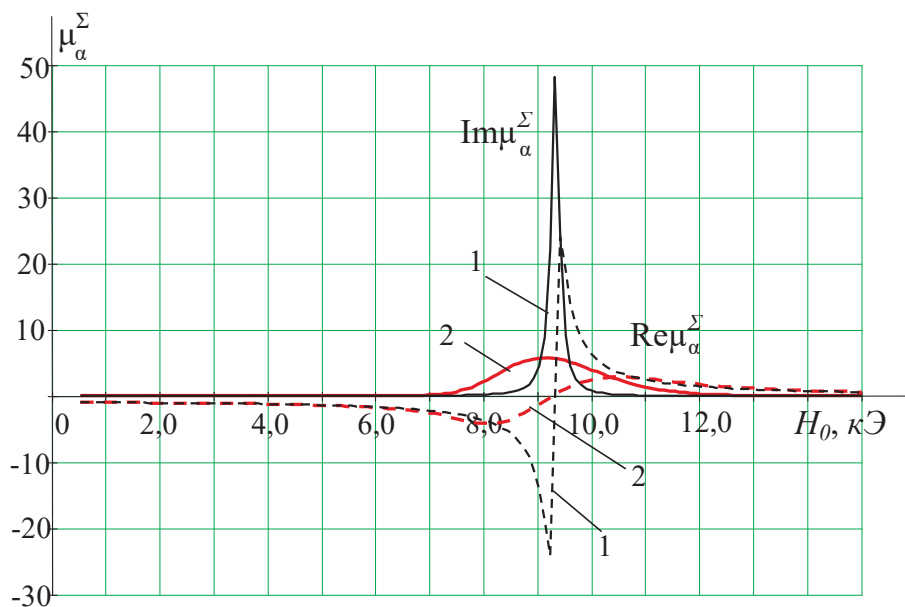


Рис. 4. Зависимости действительной и мнимой частей $\text{Re} \mu^\Sigma$, $\text{Im} \mu^\Sigma$ диагональной μ^Σ (а) и $\text{Re} \mu_a^\Sigma$, $\text{Im} \mu_a^\Sigma$ недиагональной μ_a^Σ (б) компонент тензора эффективной магнитной проницаемости магнитного 3D нанокompозита от напряженности поля подмагничивания H_0 : $f = 26 \text{ ГГц}$; кривая 1 – $\sigma = 0$ расчет (детерминированная модель); 2 – расчет (вероятностная модель) $\sigma = 895 \text{ Э}$; \bigcirc – эксперимент [17]



б)
Рис. 4. Окончание

Из сравнения результатов математического моделирования (рис. 4) следует, что расчетные характеристики ФМР, такие как значение резонансного поля, ширина ΔH резонансных кривых (рис. 4, 6 кривые 1, 2) в достаточной мере согласуются с экспериментом [17] только для результатов, полученных при помощи вероятностного алгоритма при значениях расчетных параметров $\alpha = 0,006$ и $\sigma = 893$ Э, соответственно.

Из анализа результатов (рис. 3, 4) следует, что уширение линии ФМР в реальном магнитном нанокompозите [17] определяется не столько собственными потерями α отдельных МНЧ (кривые 1 рис. 3, 4 – для $\alpha = 0,08; 0,05; 0,03; 0,006$ при $\sigma = 0$), сколько среднеквадратическим отклонением σ случайной величины магнитного поля ФМР H_r каждой из МНЧ в неоднородной магнитной наносистеме, и, следовательно, не может быть описано в рамках только детерминированной модели.

На рис. 5 показаны результаты расчета значений математического ожидания случайных величин $\text{Im}\mu_\alpha^\Sigma$, $\text{Im}\mu_\alpha^\Sigma$ от напряженности поля подмагничивания H_0 при различных значениях α и σ .

Вдали от ФМР ($H_0 < H_r^0$) значения $\text{Im}\mu_\alpha^\Sigma$, $\text{Im}\mu_\alpha^\Sigma$, определяющие магнитные потери нанокompозита, существенно отличаются (кривые 1–4 рис. 5). Наименьшие магнитные потери имеет нанокompозит при значениях расчетных параметров $\alpha = 0,006$, $H_r^0 = 9270$ Э, $\sigma = 895$ Э; (кривая 4 рис. 5), наибольшие потери – при $\alpha = 0,08$, $H_r^0 = 9180$ Э, $\sigma = 0$ (кривая 1 рис. 5). Значения магнитных потерь отличаются почти на порядок.

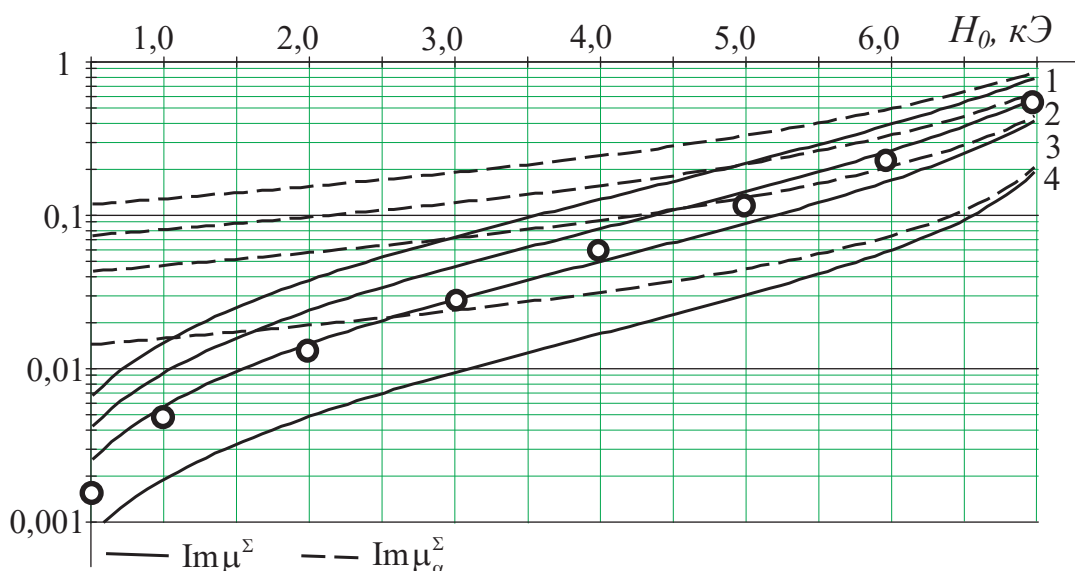


Рис. 5. Зависимость мнимой частей $\text{Im}\mu^\Sigma$ диагональной μ^Σ и $\text{Im}\mu_\alpha^\Sigma$ недиагональной μ_α^Σ компонент тензора эффективной магнитной проницаемости магнитного 3D нанокомпозита от напряженности поля подмагничивания H_0 при различных значениях α и σ : $f = 26$ ГГц, кривая 1 – $\alpha = 0,08$, $H_r^0 = 9180\text{Э}$, $\sigma = 0$; 2 – $\alpha = 0,05$, $H_r^0 = 9230\text{Э}$, $\sigma = 535\text{Э}$; 3 – $\alpha = 0,03$, $H_r^0 = 9250\text{Э}$, $\sigma = 722\text{Э}$; 4 – $\alpha = 0,006$, $H_r^0 = 9270\text{Э}$, $\sigma = 895\text{Э}$; кривые – расчет (вероятностная модель), \bigcirc – эксперимент [17]

Идентифицировать структуру экспериментально полученного магнитного нанокомпозита можно по магнитным потерям вдали от ФМР (рис. 5). Наилучшее соответствие эксперименту [17] наблюдается при значениях расчетных параметров $\alpha = 0,03$, $H_r^0 = 9250\text{Э}$, $\sigma = 722\text{Э}$ (кривая 3 рис. 5).

Развитый метод численного моделирования на основе вероятностного алгоритма может быть использован для создания компьютерных методов анализа микроволновых свойств новых магнитных наноструктурных материалов с целью их применения в магнитно-управляемых СВЧ устройствах.

Список литературы

1. Ринкевич А. Б., Устинов В. В., Самойлович М. И. [и др.]. Нанокомпозиты на основе опаловых матриц с 3D-структурой, образованной магнитными наночастицами // Технология и конструирование в электронной аппаратуре. 2008. № 4. С. 55–63.
2. Ринкевич А. Б., Перов Д. В., Самойлович М. И. [и др.]. Частотная зависимость коэффициента поглощения миллиметровых волн в 3D-нанокомпозитах на основе опаловых матриц // Радиотехника и электроника. 2009. Т. 54, № 8. С. 1–5.

3. Pardavi-Horvath M., Makeeva G. S., Golovanov O. A. Electrodynamic Model for Low Loss Microwave Nanocomposite Magnets Using Autonomous Blocks with Floquet Channels // *Journal of Applied Physics*. 2009. Vol. 105, № 7. P. 07C104–07C104-2.
4. Kodama J. R. H. Magnetic nanoparticles // *J. Magn. Magn. Mater.* 1999. Vol. 200. P. 359–372.
5. Batlle X., Labarta A. Finite-size effects in fine particles: Magnetic and transport properties // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2002. Vol. 35. P. R15–R42.
6. Coffey W. T. [et al.]. Thermally activated relaxation time of a single domain ferromagnetic particle subjected to a uniform field at an oblique angle to the easy axis: Comparison with experimental observations // *Phys. Rev. Lett.* 1998. Vol. 80. P. 5655–5658.
7. Wu Z. [et al.]. Particle size influence to the microwave properties of iron based magnetic particulate composites // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2005. Vol. 285. P. 233–39.
8. Shilov V. P. [et al.]. Effect of unidirectional anisotropy on the ferromagnetic resonance in ferrite nanoparticles // *Phys. Rev. B*. 1999. Vol. 60. P. 11902–11905.
9. Castel V. [et al.]. Broadband Ferromagnetic measurements in Ni/ZnO and Ni_y-Fe₂O₃ Nanocomposites // *J. Nanomaterials*. 2007. P. 16. doi: 10.1155/2007/27437
10. Morrish A. H. [et al.]. Ferrimagnetic resonance of iron-oxide micropowders // *J. Phys. Soc. Japan*. 1961. Vol. 17. P. 392–395.
11. Valstyn E. P. [et al.]. Ferromagnetic resonance of single domain particles // *Phys. Rev.* 1962. Vol. 128, № 5. P. 2078–2087.
12. Sharma V. K., Baiker A. Superparamagnetic effects in the ferromagnetic resonance of silica supported nickel particles // *J. Chem. Phys.* 1981. Vol. 75, № 12. P. 5596–5601.
13. Raikher Yu. L., Stepanov V. I. Intrinsic magnetic resonance in superparamagnetic systems // *Phys. Rev. B*. 1995. Vol. 51. P. 16428–16431.11
14. Гуревич А. Г., Мелков Г. А. Магнитные колебания и волны. М. : Наука, 1994. 164 с.
15. Голованов О. А., Макеева Г. С. Метод автономных блоков с магнитными нановключениями и каналами Флоке для математического моделирования магнитных наноструктур с учетом обмена и граничных условий // *Радиотехника и электроника*. 2009. Т. 54, № 12. С. 1345–1352.
16. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М. : Физ.-мат., 1962. 637 с.
17. Ustinov V. V., Rinkevich A. B. [et al.]. Anomalous magnetic antiresonance and resonance in ferrite nanoparticles embedded in opal matrix // *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2012. Vol. 324. P. 78–82.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОИСХОЖДЕНИЯ ПЛОТНЫХ (ВИДИМЫХ) КОЛЕЦ САТУРНА С УЧЕТОМ ЕГО ГРАВИТАЦИОННОГО И МАГНИТНОГО ПОЛЕЙ. ЭФФЕКТ ЧЕРНОГО – КАПРАНОВА

Владимир Викторович Черный¹, Сергей Викторович Капранов²

¹ Институт современной науки, SAIBR, Москва, Россия

² Институт биологии южных морей имени А. О. Ковалевского РАН,
Москва, Россия

¹ chernyv@bk.ru, ² sergey.v.kapranov@yandex.ru

Аннотация. Представлена математическая модель происхождения плотных (видимых) колец Сатурна, которое является загадкой на протяжении 400 лет, с тех пор как Галилей увидел их в 1610 г. Несмотря на технологическое совершенство зонда миссии Кассини, исследовавшего систему Сатурна с 2004 по 2017 г., окончательный ответ на этот вопрос пока не получен. Известные гравитационные модели неспособны описать происхождение стабильного диска колец на экваторе планеты. Во время моделирования мы изучаем движение частиц льда, которые образовались в результате разрушения ледяного спутника Сатурна внутри предела Роша или столкновения двух ледяных лун. Решается задача движения диамагнитной частицы в гравитационном и магнитном полях Сатурна. Показано, что в результате движения диамагнитные ледяные частицы образуют дисковую систему колец на магнитном экваторе планеты. С учетом этого роль магнетизма в стабилизации колец других планет может оказаться универсальной. Участие магнитного поля проявляется в процессе реализации магнитной анизотропной аккреции диамагнитных ледяных частиц, которая в итоге оказывает стабилизирующее действие на систему колец Сатурна (эффект Черного – Капранова). Решение проблемы начинается с определения намагниченности и потенциальной энергии сферической диамагнитной частицы в магнитном поле. Получаем решение типа магнитного аналога формулы Клаузиуса – Моссотти для диэлектрика, которое используем для изучения динамики движения диамагнитной частицы в гравитационном и магнитном полях Сатурна. Далее решаем задачу об одиночной намагниченной сфере и сферической частице среди идентичных диамагнитных частиц, рассеянных в дискообразной структуре. Выведены дифференциальные уравнения бесстолкновительного движения диамагнитных частиц в гравитационном и магнитном полях Сатурна. Точно решается специальное, физически обоснованное приближение этих уравнений. Оно предполагает, что суперпозиция гравитационного и магнитного полей, действующих на частицу диамагнитного льда, может объяснить стабильность колец Сатурна в экваториальной плоскости планеты.

Ключевые слова: происхождение колец Сатурна, диамагнетизм космического льда, математическая модель происхождения колец Сатурна

Благодарности: авторы выражают благодарность Г. С. Макеевой, профессору Пензенского государственного университета, за плодотворные дискуссии.

MODELING THE ORIGIN OF SATURN'S DENSE (VISIBLE) RINGS, TAKING INTO ACCOUNT ITS GRAVITATIONAL AND MAGNETIC FIELDS. TCHERNYI – KAPRANOV EFFECT

Vladimir V. Tcherniy¹, Sergey V. Kapranov²

¹ Modern Science Institute, SAIBR, Moscow, Russia

² A. O. Kovalevsky Institute of Biology of the Southern Seas, RAS,
Moscow, Russia

¹ chernyv@bk.ru, ² sergey.v.kapranov@yandex.ru

Abstract. The article presents a mathematical model of the origin of Saturn's dense (visible) rings, which has been a mystery for 400 years, since Galileo saw them in 1610. Despite the technological perfection of the Cassini mission probe, studying system of Saturn from 2004 to 2017, the final answer to this question has not yet been received. Known gravitational models are not able to describe the origin of a stable disk of rings at the equator of the planet. During the simulation, we study the movement of diamagnetic ice particles that were formed as a result of the destruction of Saturn's ice satellite within the Roche limit or the collision of two icy moons. The problem of motion of a diamagnetic particle in the gravitational and magnetic fields of Saturn is solved. It is shown that as a result of the motion all particles form a disk system of rings on the magnetic equator of the planet. Taking this into account, the role of magnetism in stabilizing the rings of other planets may be universal. The action of the magnetic field is realized in the magnetic anisotropic accretion of ice particles that stabilizes the Saturn ring system (Tchernyi – Kapranov effect). The magnetization relationships for magnetically uniform spherical particles of Saturn's rings are derived. We begin by solving the problem of magnetization and potential energy of a spherical particle in a magnetic field, and obtain a solution in the form of a magnetic analogue of the Clausius – Mossotti equation for a dielectric, which we use to study the dynamics of particle motion in gravitational and magnetic fields. The problem of a solitary magnetized sphere and spherical particle among identical particles scattered in a disk-like structure is solved. The differential equations of collisionless motion of particles in the gravitational and magnetic fields of Saturn are derived. A special approximation of these equations is solved exactly, and its solution suggests that the superposition of the gravitational and magnetic field acting on diamagnetic ice particles can account for the stability of Saturn's rings in the equatorial plane of the planet.

Keywords: origin of Saturn's rings, diamagnetism of cosmic ice, mathematical model of the Saturn's rings origin

Acknowledgments: the authors express their gratitude to G. S. Makeeva, professor at Penza State University for fruitful discussions.

1. Введение

В статье представлена математическая модель происхождения плотных (видимых) колец Сатурна, которое оставалось загадкой в течение 400 лет, с тех пор как Галилей увидел их в 1610 году. Несмотря

на технологическое совершенство зонда миссии Кассини, исследовавшего систему Сатурна с 2004 по 2017 год, окончательный ответ на этот вопрос пока не получен. Известные гравитационные модели не способны описать происхождение стабильного диска колец на экваторе планеты. Во время моделирования мы изучаем движение частиц льда, которые образовались в результате разрушения ледяного спутника Сатурна внутри предела Роша или столкновения двух ледяных лун. Существует множество гравитационных моделей происхождения колец Сатурна [1–4]. Однако они описывают только, каким образом могла образоваться необходимая масса ледяных частиц в зоне Роша, соответствующая массе льда в кольцах. Эти модели не способны описать сам процесс происхождения стабильного диска колец на экваторе планеты [5, 6]. В [7, 8] показано, что лед в кольцах диамагнитен, и может соответствовать земному льду XI, который имеет стабильные параметры при $T < 73$ К, как у колец. В этой статье мы показываем, что диамагнетизм ледяных частицы колец может отвечать за генезис и стабильность колец. Известно, что диамагнитные материалы в неоднородных магнитных полях вытесняются в области слабого поля. Для колец Сатурна эта особенность обеспечивает минимум потенциальной энергии диамагнитных частиц в плоскости магнитного экватора. Принимая это во внимание, роль магнетизма в стабилизации колец может оказаться универсальной и для других планет. Чтобы понять происхождение колец Сатурна и их эволюцию, необходимо изучить намагниченность и динамику частиц колец в магнитном поле планеты. Мы начинаем с решения задачи о намагниченности и потенциальной энергии сферической частицы в магнитном поле. Получаем решение в виде магнитного аналога уравнения Клаузиуса-Моссотти для диэлектрика, а затем используем его для изучения динамики движения частицы в гравитационном и магнитном полях Сатурна. Действие магнитного поля проявляется в процессе реализации магнитной анизотропной аккреции ледяных частиц, стабилизирующей систему колец Сатурна (эффект Черного-Капранова). Выведены дифференциальные уравнения бесстолкновительного движения частиц в гравитационном и магнитном полях Сатурна. Точно решается специальное, физически обоснованное приближение этих уравнений. Оно предполагает, что суперпозиция гравитационного и магнитного полей, действующих на частицу диамагнитного льда, может объяснить стабильность колец Сатурна в экваториальной плоскости планеты.

2. Магнитостатика однородно намагниченных сфер в магнитном поле

В магнитном поле планеты частицы льда приобретают намагниченность и магнитный момент. Это величины, характеризуют силу взаимодействия с магнитным полем, необходимую для реализации

ньютоновской динамики частиц, и эти величины для отдельной частицы отличаются от величин для частиц, собранных в кольца, как показано ниже [5]. Предполагаем, что частица льда имеет сферическую форму и однородно намагничена, что позволяет решать задачу намагничивания в сферических координатах.

2.1. Одиночная однородно намагниченная сфера

2.1.1. Уравнение Лапласа и его общее решение для сферы

Задача об однородно намагниченной сфере может быть решена, начиная с решения уравнения Лапласа для скалярного магнитного потенциала сферы в магнитном поле [10]. Чтобы вывести это уравнение, давайте сначала рассмотрим два вспомогательных закона. Закон циркуляции магнитного поля Максвелла-Ампера подразумевает, что пространственное изменение магнитного поля, окружающего тело, неразрывно связано с плотностью электрического тока в нем, скоростью изменения электрического поля в нем или с обоими эффектами. Это четвертое уравнение Максвелла:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (1)$$

здесь μ_0 и ε_0 – магнитная и диэлектрическая проницаемости; \mathbf{B} – магнитное поле; \mathbf{J} – плотность тока и \mathbf{E} – электрическое поле. Как плотность тока, так и скорость изменения электрического поля частицы в магнитном поле равны нулю ($\mathbf{J} = \mathbf{0}$ and $\partial \mathbf{E} / \partial t = \mathbf{0}$), так как в частице отсутствует макроскопический ток, предполагается, что электрическое поле статично или исчезающе мало. Тогда получаем:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (2)$$

Другое уравнение Максвелла, которое является выражением закона Гаусса для магнетизма, утверждает, что суммарный поток магнитного поля, исходящий от замкнутой поверхности, равен нулю, поскольку отдельных магнитных монополей не существует. Согласно теореме Гаусса, дифференциальная форма этого закона имеет вид:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

Скалярное потенциальное поле для сферы, называемое скалярным магнитным потенциалом Φ , может быть представлено в виде:

$$\mathbf{B} = -\mu \nabla \Phi \quad (4)$$

где μ – абсолютная магнитная проницаемость сферы. Существование этого потенциала обусловлено выражением (2) и теоремой Стокса. Принимая во внимание (3) и предполагая μ пространственно не изменяемым, получаем уравнение Лапласа для скалярного магнитного потенциала Φ в виде:

$$\nabla^2 \Phi = \nabla \cdot (\nabla \Phi) = 0 \quad (5)$$

В общем случае решение (5) в сферических координатах (r, θ, φ) имеет вид:

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{q=-l}^l (A_l r^l + C_l r^{-l-1}) P_l^q(\cos \theta) e^{-iq\varphi} \quad (6)$$

где P_l^q – присоединенный полином Лежандра степени l и порядка q , а A_l и C_l – постоянные, определяемые граничными условиями [10]. Сферическая координата r – это радиальное расстояние от центра сферы, θ – полярный или зенитный угол (в зените он $\theta = 0$), φ – азимутальный угол.

2.1.2. Скалярный магнитный потенциал для однородно намагниченной сферы

Азимутальная симметрия магнитного поля и потенциала подразумевает, что $q = 0$ (6), и

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + C_l r^{-l-1}) P_l(\cos \theta). \quad (7)$$

Магнитный потенциал (7) должен быть конечным при $r = 0$ и $r = \infty$. А радиальная функция потенциала внутри, $r \leq R$ и вне, $r \geq R$ сферы вдоль радиуса должны отличаться:

$$\Phi_{in}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta), \quad r \leq R, \quad (8)$$

и

$$\Phi_{out}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^{-l-1} P_l(\cos \theta), \quad r \geq R. \quad (9)$$

Напряженность магнитного поля определяется как отрицательный градиент магнитного потенциала:

$$\mathbf{H} = -\nabla \Phi. \quad (10)$$

Его радиальная компонента разрывается при $r = R$ из-за ненулевой плотности магнитного заряда σ_M , определяемого по намагниченности \mathbf{M} в соответствии с теоремой Гаусса о дивергенции:

$$\sigma_M = \mathbf{n} \cdot \mathbf{M} = M \cos \theta. \quad (11)$$

Тогда первое граничное условие имеет вид:

$$\left(\frac{\partial \Phi_{in}}{\partial r} - \frac{\partial \Phi_{out}}{\partial r} \right) \bigg|_{r=R} = \sigma_M. \quad (12)$$

Из (8)–(12) получаем равенство:

$$\sum_{l=0}^{\infty} l A_l R^{l-1} P_l(\cos \theta) + \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) C_l R^{-l-2} P_l(\cos \theta) = M \cos \theta. \quad (13)$$

Это равенство выполняется только в том случае, если полиномы Лежандра имеют степень 1 ($l=1$). Тогда:

$$A_1 + 2C_1R^{-3} = M. \quad (14)$$

Второе граничное условие следует из непрерывности магнитного потенциала при $r = R$:

$$(\Phi_{in} - \Phi_{out})|_{r=R} = 0 \quad (15)$$

или из непрерывности тангенциальных составляющих напряженности магнитного поля на поверхности сферы с радиусом R :

$$\left(\frac{\partial \Phi_{in}}{\partial \theta} - \frac{\partial \Phi_{out}}{\partial \theta} \right) \Big|_{r=R} = 0. \quad (16)$$

Применяем граничные условия (15) or (16) к магнитным потенциалам (8) and (9) с $l=1$,

$$A_1 = C_1R^{-3}. \quad (17)$$

Решая уравнения (14)–(17), получаем постоянные интегрирования

$$A_1 = M/3 \quad (18)$$

и

$$C_1 = MR^3/3. \quad (19)$$

Поскольку по определению намагниченность это магнитный момент на единицу объема:

$$\mathbf{m} = (4/3)\pi R^3 \mathbf{M},$$

то магнитный потенциал в (8) и (9) можно записать в виде:

$$\Phi_{in}(r, \theta) = (Mr \cos \theta)/3 = \mathbf{m} \cdot \mathbf{r} / (4\pi R^3) \quad \text{for } r \leq R, \quad (20)$$

и

$$\Phi_{out}(r, \theta) = MR^3 \cos \theta / (3r^2) = \mathbf{m} \cdot \mathbf{r} / (4\pi r^3) \quad \text{for } r \geq R. \quad (21)$$

2.1.3. Намагниченность и магнитный момент одиночной однородно намагниченной сферы

Выражения для намагниченности и магнитного момента равномерно намагниченной сферы, как функции внешнего магнитного поля и магнитной проницаемости, могут быть получены путем приравнивания общей плотности магнитного потока внутри сферы, выраженной, с одной стороны, как суперпозиции плотностей внешнего, внутреннего и намагничивающих потоков, а с другой стороны, в линейном режиме, как произведение магнитной проницаемости и суммы напряженностей внешнего и внутреннего магнитного полей.

Из (20) и (21) можно получить напряженность магнитного поля внутри сферы:

$$\mathbf{H}_{in} = -\nabla\Phi_{in} = -M(\mathbf{e}_r \cos\theta - \mathbf{e}_\theta \sin\theta)/3 = -\mathbf{M}/3 \quad (22)$$

и вне сферы:

$$\mathbf{H}_{out} = -\nabla\Phi_{out} = MR^3(2\mathbf{e}_r \cos\theta + \mathbf{e}_\theta \sin\theta)/(3r^3) = m(2\mathbf{e}_r \cos\theta + \mathbf{e}_\theta \sin\theta)/(4\pi r^3) \quad (23)$$

где \mathbf{e}_r и \mathbf{e}_θ это радиальный и полярный единичные векторы сферической системы координат.

Важно отметить, что уравнение (23) связывает магнитный момент любой магнитно однородной сферы с напряженностью магнитного поля вокруг нее. Это в равной степени справедливо для индуцированного магнитного момента (сферической частицы) и собственного магнитного момента (планеты), и этот факт будет использован далее.

Сейчас рассмотрим сферу, помещенную во внешнее магнитное поле \mathbf{B}_0 с напряженностью \mathbf{H}_0 . Внутри сферы полное магнитное поле является суммой внешнего магнитного поля и полей за счет наведенного тока и намагничивания:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{in} = \mathbf{B}_0 + \mu_0(\mathbf{H}_{in} + \mathbf{M}) = \mathbf{B}_0 + 2\mu_0\mathbf{M}/3 \quad \text{for } r \leq R \quad (24)$$

Здесь учтено выражение (22). И соответствующая напряженность имеет вид:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{in} = \mathbf{B}_0/\mu_0 - \mathbf{M}/3 \quad \text{for } r \leq R \quad (25)$$

А полное магнитное поле определяется напряженностью магнитного поля умноженной на абсолютную проницаемость μ :

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \quad (26)$$

Тогда из (24)–(26) следует, что

$$\mathbf{B}_0 + 2\mu_0\mathbf{M}/3 = \mu(\mathbf{B}_0/\mu_0 - \mathbf{M}/3) \quad \text{for } r \leq R \quad (27)$$

Окончательно получаем, что

$$\mathbf{M} = \frac{3\mathbf{B}_0}{\mu_0} \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} \quad (28)$$

и

$$\mathbf{m} = \frac{4\pi R^3 \mathbf{B}_0}{\mu_0} \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0}. \quad (29)$$

Уравнения (28) и (29) фактически являются магнитным эквивалентом соотношения Клаузиуса-Моссотти для диэлектрика, которое связывает статическую диэлектрическую проницаемость неполярного диэлектрика с его поляризацией. Для диамагнетика (28) и (29) не удовлетворяются, если частица магнитно неоднородна на макроскопическом

и микроскопическом уровне, то есть содержит пространственно разделенные диполи.

Из (28) и (29) следует, что намагничивание и магнитный момент диамагнитных сфер направлены противоположно внешнему магнитному полю.

Полезно отметить, что поскольку среди диамагнетиков сверхпроводники имеют наименьшее значение магнитной проницаемости, $\mu = 0$, то у них наибольшие абсолютные значения намагниченности $-1.5\mathbf{B}_0/\mu_0$ и магнитного момента $-2\pi R^3\mathbf{B}_0/\mu_0$.

2.2. Однородно намагниченная сфера в дискообразной структуре, состоящей из одинаковых сфер

Рассмотрим сферу, помещенную во внешнее магнитное поле, заполненное одинаково намагниченными сферами в бесконечной дисковой структуре. Такой диск является моделью плотных колец Сатурна. Предполагается, что сферы равномерно распределены в гексагональной упаковке с плоской плотностью σ . Задача намагничивания такой структуры может быть решена по аналогии с задачей об одной однородно намагниченной сфере с внесением незначительных модификаций.

Намагниченные сферы, каждая из которых обладает магнитным дипольным моментом \mathbf{m}_p , коллективно генерируют индуцированное глобальное магнитное поле, которое удобно использовать в качестве интегральной характеристики вместо суммированных напряженностей магнитного поля отдельных сфер.

Если угол между диском и плоскостью магнитного экватора равен ϑ_t , а расстояние от центра сферы до ближайшего края диска, представляющего центры ближайших частиц, равно r_0 , то намагниченная сфера будет испытывать общую напряженность магнитного поля диска \mathbf{H}_d , полученную с учетом (23):

$$\mathbf{H}_d = \int_S \mathbf{H}_{out} \sigma ds = \frac{\sigma m_p}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_0}^{\infty} \sin \varphi \cos \vartheta_t \frac{2\mathbf{e}_r \sqrt{1 - \sin^2 \varphi \cos^2 \vartheta_t} + \mathbf{e}_\theta \sin \varphi \cos \vartheta_t}{r'^2} dr' \quad (30)$$

$$= -\mathbf{e}_\theta \sigma m_p \cos^2 \vartheta_t / (4r_0).$$

Интегрирование в (30) осуществляется по площади диска, который является непрерывным.

Используя аналогию с (24) и (25) получаем полное магнитное поле внутри сферы:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_{in} + \mathbf{B}_d = \mathbf{B}_0 + \mu_0 (\mathbf{H}_{in} + \mathbf{M} + \mathbf{H}_d) = \mathbf{B}_0 + \mu_0 \mathbf{M} \left(2 - \pi R^3 \sigma \cos^2 \vartheta_t / r_0 \right) / 3 \quad \text{for } r \leq R \quad (31)$$

А его напряженность:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{in} + \mathbf{H}_d = \mathbf{B}_0 / \mu_0 - \mathbf{M} \left(1 - \pi R^3 \sigma \cos^2 \vartheta_t / r_0 \right) / 3 \quad \text{for } r \leq R. \quad (32)$$

После преобразований, как в случае с (28) и (29) получаем, что намагниченность диска:

$$\mathbf{M} = \frac{3\mathbf{B}_0}{\mu_0} \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0 - (\mu + \mu_0)\pi R^3 \sigma \cos^2 \vartheta_t / r_0}, \quad (33)$$

А его магнитный момент:

$$\mathbf{m}_p = \frac{4\pi R^3 \mathbf{B}_0}{\mu_0} \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0 - (\mu + \mu_0)\pi R^3 \sigma \cos^2 \vartheta_t / r_0}. \quad (34)$$

Полезно отметить, что если диск состоит из сверхпроводящих сфер, то намагниченность равна $-3\mathbf{B}_0 / (2\mu_0 - \mu_0\pi R^3 \sigma \cos^2 \vartheta_t / r_0)$ а магнитный момент диска колец равен $-4\pi R^3 \mathbf{B}_0 / (2\mu_0 - \mu_0\pi R^3 \sigma \cos^2 \vartheta_t / r_0)$.

Легко видеть, что намагниченность и магнитный момент дискообразной структуры по своим абсолютным значениям выше, чем у единственной сферы, из-за совмещения множества магнитных диполей с полем. Следовательно, ожидается, что сила диамагнитного вытеснения в области слабого поля в этом случае будет сильнее.

3. Потенциальная энергия и уравнения движения намагниченных сфер

Магнитные моменты в (29) и (34) могут быть обобщены формулой

$$\mathbf{m}_p = C\mathbf{B}_0 \quad (35)$$

где C это функция магнитных свойств и размера сфер. Для диамагнетиков $C < 0$.

Для вывода уравнений движения необходимо найти потенциальную энергию U намагниченной сферы. Для сферической частицы с массой M_p в магнитном и гравитационном поле планеты, в точечно-дипольном приближении, эта энергия равна:

$$U = -GM_S M_p / r_{S-p} - \mathbf{m}_p \cdot \mathbf{B}_{out} = -GM_S M_p / r_{S-p} - C\mu_0^2 m_S m_p (3\cos^2 \theta_{S-p} + 1) / (4\pi r_{S-p}^3)^2 \quad (36)$$

где $G = 6.67408 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$ – это гравитационная постоянная, $M_S = 5.68319 \cdot 10^{26} \text{ кг}$ – это масса планеты Сатурн; $m_S = 4.6 \cdot 10^{18} \text{ Т} \cdot \text{м}^3$ – это величина магнитного момента Сатурна [11]; r_{S-p} – это радиальное расстояние между центром Сатурна и сферической частицей; θ_{S-p} – это зенитный угол в сферической системе координат, исходящей из центра планеты. Это показано на рис. 1.

Первый член в правой части (36) соответствует гравитационной составляющей, а второй – магнитной составляющей потенциальной энергии.

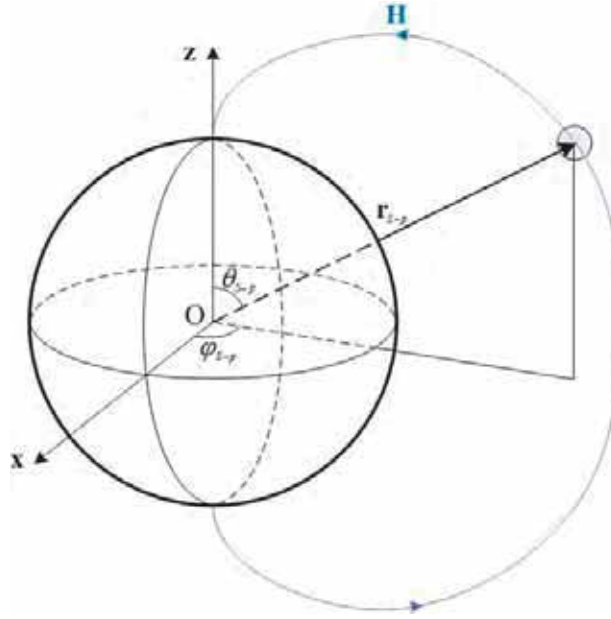


Рис. 1. Сферическая частица (маленький круг) в магнитном поле Сатурна. Показана только одна силовая линия напряженности магнитного поля (\mathbf{H}). Сферическая система координат $(r_{S-p}, \theta_{S-p}, \phi_{S-p})$ привязана к центру планеты; О: начало координат, Z: зенитное направление, X : опорный вектор в плоскости, ортогональной зенитному направлению

Сила, действующая на сферическую диамагнитную ледяную частицу, равна отрицательному градиенту потенциальной энергии:

$$M_p \mathbf{a} = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial r_{S-p}} \mathbf{e}_{r_{S-p}} - \frac{1}{r_{S-p}} \frac{\partial U}{\partial \theta_{S-p}} \mathbf{e}_{\theta_{S-p}} \quad (37)$$

$$= \mathbf{e}_{r_{S-p}} \left[-\frac{GM_S M_p}{r_{S-p}^2} - \frac{3C\mu_0^2 m_S m_p}{8\pi^2 r_{S-p}^7} (3\cos^2 \theta_{S-p} + 1) \right] - \mathbf{e}_{\theta_{S-p}} \frac{3C\mu_0^2 m_S m_p}{8\pi^2 r_{S-p}^7} \sin \theta_{S-p} \cos \theta_{S-p}$$

где \mathbf{a} – это линейное ускорение, $\mathbf{e}_{r_{S-p}}$ и $\mathbf{e}_{\theta_{S-p}}$ – это радиальный и полярный единичные векторы в сферической системе координат $(r_{S-p}, \theta_{S-p}, \phi_{S-p})$, связанной с планетой.

Исходя из формулы вектора ускорения в сферических координатах [12], соответствующие уравнения движения имеют вид:

$$\begin{cases} \ddot{r}_{S-p} - r_{S-p} \dot{\theta}_{S-p}^2 - r_{S-p} \dot{\phi}_{S-p}^2 \sin^2 \theta_{S-p} = -\frac{(\nabla U)_r}{M_p} = -\frac{GM_S}{r_{S-p}^2} - \frac{3C\mu_0^2 m_S m_p}{8\pi^2 r_{S-p}^7 M_p} (3\cos^2 \theta_{S-p} + 1), \\ r_{S-p} \ddot{\theta}_{S-p} + 2\dot{r}_{S-p} \dot{\theta}_{S-p} - r_{S-p} \dot{\phi}_{S-p}^2 \sin \theta_{S-p} \cos \theta_{S-p} = -\frac{(\nabla U)_\theta}{M_p} = -\frac{3C\mu_0^2 m_S m_p}{8\pi^2 r_{S-p}^7 M_p} \sin \theta_{S-p} \cos \theta_{S-p}, \\ r_{S-p} \ddot{\phi}_{S-p} \sin \theta_{S-p} + 2\dot{r}_{S-p} \dot{\phi}_{S-p} \sin \theta_{S-p} + 2r_{S-p} \dot{\theta}_{S-p} \dot{\phi}_{S-p} \cos \theta_{S-p} = -\frac{(\nabla U)_\phi}{M_p} = 0. \end{cases} \quad (38)$$

Уравнения (38) аналитически неразрешимы. Их долгосрочное численное решение вряд ли осуществимо, да и не целесообразно. Лучше

рассмотреть физически обоснованную аппроксимацию уравнений движения, дающую значимые результаты.

4. Динамическая аппроксимация: намагниченные ледяные частицы вращаются на равном расстоянии от центра ($r_{S-p} = \text{const}$).

Поскольку в этом случае радиальное ускорение \ddot{r}_{S-p} и радиальная скорость \dot{r}_{S-p} равны нулю, то уравнение движения (38) сводится к переопределенной системе уравнений, где число неизвестных больше числа уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_{S-p}^2 + \dot{\phi}_{S-p}^2 \sin^2 \theta_{S-p} = GM_S / r_{S-p}^3 + 3C\mu_0^2 m_S m_p (3\cos^2 \theta_{S-p} + 1) / (8\pi^2 r_{S-p}^8 M_p), \\ \ddot{\theta}_{S-p} - \dot{\phi}_{S-p}^2 \sin \theta_{S-p} \cos \theta_{S-p} = -3C\mu_0^2 m_S m_p \sin \theta_{S-p} \cos \theta_{S-p} / (8\pi^2 r_{S-p}^8 M_p), \\ \ddot{\phi}_{S-p} + 2\dot{\theta}_{S-p} \dot{\phi}_{S-p} / \tan \theta_{S-p} = 0. \end{cases} \quad (39)$$

Если $C \neq 0$, то из первого и второго уравнений (39) можно получить дифференциальное уравнение второго порядка относительно зенитного угла:

$$\ddot{\theta}_{S-p} + \dot{\theta}_{S-p}^2 \cot \theta_{S-p} = \frac{GM_S}{r_{S-p}^3} \cot \theta_{S-p} + \frac{3C\mu_0^2 m_S m_p}{2\pi^2 r_{S-p}^8 M_p} \cot \theta_{S-p} \cos^2 \theta_{S-p}. \quad (40)$$

Получаем набор решений уравнения (40) в виде

$$\theta_{S-p} = \{(2k+1)\pi/2\},$$

где k целое.

Основное решение уравнения (40) имеет вид: $\theta_{S-p} = \pi/2$, то есть все диамагнитные ледяные частицы оказываются на магнитном экваторе Сатурна.

Физически это понятно, так как магнитное поле Сатурна осесимметричное, оно имеет магнитный экватор. На магнитном экваторе энергия диамагнитных ледяных частиц имеет минимальное значение. Это приводит к тому, что в результате движения под действием гравитационных сил и силы диамагнитного выталкивания, все диамагнитные ледяные частицы оказываются на магнитном экваторе, где образуют стабильную дисковую систему из колец. Для Сатурна магнитный экватор практически совпадает с географическим экватором. По меридиану стабильность диска колец обеспечивается тем, что частицы находятся в трехмерной потенциальной яме на экваторе, а по радиусу они сдерживаются градиентом магнитного поля Сатурна.

Единственность решения (40) по существу объясняет сильную плоскостность структуры колец Сатурна и их расположение в плоскости магнитного экватора. Частицы попадают на магнитный экватор в результате действия гравитационных сил и силы диамагнитного выталкивания.

Для азимутальной скорости получаем уравнение:

$$\dot{\phi}_{S-p} = \sqrt{GM_S/r_{S-p}^3 + 3C\mu_0^2 m_S m_p / (8\pi^2 r_{S-p}^8 M_p)}. \quad (41)$$

Из (41) следует, что диамагнитные ледяные частицы стабильно движутся по круговым орбитам в плоскости экватора Сатурна, где существует баланс между силой гравитации, центробежной силой и силой диамагнитного выталкивания.

5. Выводы

В этой работе была представлена магнитостатика и динамика равномерно намагниченных диамагнитных сфер в сферически симметричном гравитационном и осесимметричном магнитном поле планеты. Были найдены соотношения для намагниченности и магнитного момента, как одиночной диамагнитной сферы, так и сферы, помещенной в бесконечную дискообразную структуру из равномерно распределенных идентичных диамагнитных сфер, моделирующих плотные (видимые) кольца Сатурна. Магнитная сила, действующая на сферу в диске с намагниченными сферами, сильнее, чем сила, действующая на одну сферу, что обеспечивает стабильность диска частиц колец Сатурна.

Получено соотношение потенциальной энергии для диамагнитных сферических ледяных частиц в суперпозиции гравитационного и магнитного полей. Это привело к формулированию уравнений бесстолкновительного движения диамагнитных частиц. Рассмотрен частный случай этих уравнений применительно к частице, находящейся в ненулевом магнитном поле на постоянном расстоянии от центра тяжести. Как следует из решения уравнения для зенитного угла, при наложении действия силы гравитационного поля и действия силы диамагнитного выталкивания магнитного поля круговая орбита частицы в итоге оказывается в плоскости магнитного экватора, что объясняет стабильную структуру диска колец и их расположение в плоскости магнитного экватора Сатурна.

Учет действия магнитного поля Сатурна приводит к дополнительному процессу магнитной анизотропной аккреции движущихся диамагнитных ледяных частиц, что в итоге стабилизирует всю дисковую систему на магнитном экваторе Сатурна (эффект Черного-Капранова), который совпадает с географическим экватором.

Проведенное моделирование происхождения плотных (видимых) колец Сатурна полностью подтверждается результатами измерений и наблюдениями зонда Кассини миссии НАСА в 2004–2017 гг.

Полученные результаты, представленные в данной статье, говорят о фундаментальной роли магнетизма Сатурна в происхождении его колец и в их эволюционной динамике.

Список литературы

1. Горькавый Н. Н., Фридман А. М. Физика планетных колец // Успехи Физических Наук. 1990. Т. 160, № 2. С. 169–237.
2. Canup R. M. Origin of Saturn's rings and inner moons by mass removal from a lost Titan-sized satellite // Nature. 2010. Vol. 468. P. 943–946.
3. Wisdom J. [et al.]. Loss of a satellite could explain Saturn's obliquity & young rings // Science. Vol. 377 (6612). P. 12285–1289.
4. Teodoro L. F. A. [et al.]. A Recent impact origin of Saturn's rings and mid-sized moons // The Astrophysical Journal. 2023. Vol. 955, № 2. P. 137.
5. Crida A., Charnoz S. Solar system: recipe for making Saturn's rings // Nature. 2010. Vol. 468. P. 903–905.
6. Crida A., Charnoz S., Hsu H.-W., Dones L. Are Saturn's Rings Actually Young? // Nature Astronomy. 2019. № 3. P. 967–970.
7. Hemley R. J. Effects of high pressure on molecules // Annual Review of Physical Chemistry. 2000. Vol. 51. P. 763–800.
8. Tchernyi V. V., Kapranov S. V. To the problem of the properties of Saturn's rings' ice // Research Notes of the AAS. 2021. Vol. 5. P. 255.
9. Tchernyi V. V., Kapranov S. V. Contribution of magnetism to the origin of Saturn's rings // The Astrophysical Journal. 2020. Vol. 894, № 1. P. 62.
10. Jackson J. D. Classical Electrodynamics. 3rd ed. New York : Wiley, 1999.
11. Russell C. T., Dougherty M. K. Magnetic fields of outer planets // Space Science Review. 2010. Vol. 152. P. 251–269.
12. Shapiro I. L., Berredo-Peixoto G. de. Lecture Notes on Newtonian Mechanics. New York : Springer, 2013.

SCIENTIFIC RESEARCH AT THE DEPARTMENT OF "HIGHER AND APPLIED MATHEMATICS" OF PENZA STATE UNIVERSITY (1943–2023)

Ilya V. Boykov

Penza State University, Penza, Russia
i.v.boykov@gmail.com

Abstract. The work is devoted to a review of the initial research (optimal methods for calculating singular and hypersingular integrals, stability of solutions of systems of differential and integral equations, approximation theory, etc.) conducted at the Department of Higher Mathematics of the Penza Industrial Institute, later the Department of Higher and Applied Mathematics of Penza State University, since its foundation (November 1, 1943) until today.

Keywords: higher and applied mathematics, Penza State University, approximation theory, optimal calculation methods, differential and integral equations

The department of “Higher Mathematics” (HM) of the Penza Industrial Institute (PII) (its successor is the department of “Higher and Applied Mathematics” (HAP) of the Penza State University (PSU)) was one of the first departments of the Penza Industrial Institute organized on November 1, 1943. Over the next 80 years, scientific work at the department was carried out in the following directions:

- Approximation theory (splines, widths, -entropy);
 - Optimal methods for calculating singular and hypersingular integrals;
 - Approximate methods for solving singular and hypersingular integral equations, Riemann and Hilbert boundary value problems);
 - Approximate methods for solving direct and inverse problems of gravity exploration;
 - Approximate methods for solving inverse problems of mathematical physics;
 - Methods for identifying parameters of dynamic systems;
 - Computer science: modeling of mathematical physics equations on artificial neural networks, information compression, cryptography;
 - Stability of solutions to systems of differential and integral equations;
 - Mathematical models of ecology, economics, medicine;
 - Direct and inverse problems of electrodynamics.
- Let's look at each of these areas separately.

1. APPROXIMATION THEORY

The first works on approximation theory carried out at the department were associated with the research of V. I. Levin¹ on the asymptotic

expansion of some classes of functions. In 1950 V. I. Levin constructed an asymptotic expansion $\zeta(x)$ of the Riemann function (for $x = 1/2$) [55], thereby generalizing the results of S. Ramanujan.

The next range of problems is related to the study of approximation of functions by asymptotic polynomials – a direction actively developed by Ph.D., Associate Professor I. I. Eterman². Asymptotic polynomials are understood as polynomials that are not polynomials of the best uniform approximation, but asymptotically tend to them as their degree increases. The construction of asymptotic polynomials is based on replacing the Chebyshev alternance nodes, which in most cases are almost impossible to calculate accurately, with the nodes of Chebyshev polynomials of the first or second kind. The results obtained in the field of theory and applications of asymptotic polynomials are summarized in the monographs [70], [43]³. Asymptotic polynomials in the 60-80s of the last century were widely used in solving integral and differential equations and in the qualitative study of dynamic systems.

In the 70s, Ph.D., Associate Professor A. T. Erokhin develops methods for approximating one-dimensional and multidimensional multiextremal functions. Received by A. T. Erokhin's results have found application in the approximation and compression of geophysical fields. A series of articles devoted to this area was published in the book [47].

The next direction in approximation theory being developed at the department, is associated with problems formulated by the outstanding Soviet and Russian mathematician, corresponding member of the USSR Academy of Sciences K. I. Babenko. In the work [3] K. I. Babenko formulated a number of problems that he considered the most important in computational mathematics. Among them were the problem of calculating the widths of the class of functions $Q_r(\Omega, M)$ and the problem of asymptotics of solutions of elliptic equations. These problems were solved I. V. Boykov [6], [7], [10], [14].

Let us recall the definition of the Kolmogorov widths.

Definition 1. Let L^n – be a set of n -dimensional linear subspaces of the space B . Expression $d_n(X, B) = \inf_{L^n} \sup_{x \in X} \inf_{u \in L^n} \|x - u\|$, where the last \inf

is taken over all subspaces of L^n dimension n , defines the n -Kolmogorov width.

Let us recall the definition of the function class $Q_r(\Omega, M)$.

Definition 2. [3]. Let $\Omega = [-1, 1]^l$, $l = 1, 2, \dots$. The function $\varphi(x_1, \dots, x_l)$ belongs to the class $Q_r(\Omega, M)$, if the following conditions are being carried out

$$\max_{x \in \Omega} |\partial^{|\nu|} \varphi(x_1, \dots, x_l) / \partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_l^{\nu_l}| \leq M \text{ at } 0 \leq |\nu| \leq r,$$

$$|\partial^{|\nu|} \varphi(x_1, \dots, x_l) / \partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_l^{\nu_l}| \leq M / (d(x, \Gamma))^{| \nu | - r} \text{ for } r < |\nu| \leq 2r + 1,$$

where $x = (x_1, \dots, x_l)$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_l)$, $\nu_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, l$, $|\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_l$, $d(x, \Gamma)$ – distance from point x to the boundary Γ of the region Ω , calculated by the formula $d(x, \Gamma) = \min_{1 \leq i \leq l} \min(|-1 - x_i|, |1 - x_i|)$.

Later I. V. Boykov introduced the function classes $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $\bar{Q}_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $Q_{r,\gamma,p}(\Omega, M)$ ($r = 1, 2, \dots, 1 \leq p < \infty$), $\bar{Q}_{r,\gamma,p}(\Omega, M)$ ($r = 1, 2, \dots, 1 \leq p < \infty$), $B_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $\bar{B}_{r,\gamma}(\Omega, M)$, which are generalizations of the class of functions $Q_r(\Omega, M)$.

Let us present the definitions of the function classes $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$ and $B_{r,\gamma}(\Omega, M)$.

Definition 3. [7]. Let $\Omega = [-1, 1]^l$, $l = 1, 2, \dots$. The function $\varphi(x_1, \dots, x_l)$ belongs to the class $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$, if the following conditions are being carried out

$$\max_{x \in \Omega} |\partial^{|\nu|} \varphi(x) / \partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_l^{\nu_l}| \leq M \text{ at } 0 \leq |\nu| \leq r,$$

$$|\partial^{|\nu|} \varphi(x) / \partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_l^{\nu_l}| \leq M / (d(x, \Gamma))^{| \nu | - r - \zeta} \text{ for } r < |\nu| \leq s,$$

where $s = r + [\gamma] + 1$, $\gamma = [\gamma] + \mu$, $0 < \mu < 1$, $\zeta = 1 - \mu$ at γ – non-integer, $s = r + \gamma$ for γ – whole.

Definition 4. [7]. Let $\Omega = [-1, 1]^l$, $l = 1, 2, \dots$, $r = 1, 2, \dots, 0 < \gamma \leq 1$. Function $\varphi(x_1, \dots, x_l)$ belongs to class $B_{r,\gamma}(\Omega, M)$, if following conditions are being carried out

$$\max_{x \in \Omega} |\partial^{|\nu|} \varphi(x_1, \dots, x_l) / \partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_l^{\nu_l}| \leq M^{|\nu|} |\nu|^{|\nu|} \text{ at } 0 \leq |\nu| \leq r,$$

$$|\partial^{|\nu|} \varphi(x_1, \dots, x_l) / \partial x_1^{\nu_1} \dots \partial x_l^{\nu_l}| \leq M^{|\nu|} |\nu|^{|\nu|} / (d(x, \Gamma))^{| \nu | - r - 1 + \gamma} \text{ for } r < |\nu| \leq \infty.$$

Such classes of functions, in addition to solutions of elliptic equations, include solutions of weakly singular, singular and hypersingular integral equations and a number of other equations of mathematical physics. In addition, they include geophysical fields of various natures.

In the works [6], [7], [14] the widths were calculated and optimal methods for approximating the classes of functions $Q_{r,\gamma}(\Omega, M), B_{r,\gamma}(\Omega, M)$ were constructed and their generalizations. Local splines were used as an approximation apparatus. In the monograph [14] the Kolmogorov ε -entropy of compact sets of functions $Q_{r,\gamma}(\Omega, M), B_{r,\gamma}(\Omega, M)$ is calculated.

Obtained results on optimal approximation methods for special classes of functions were used as the basis for constructing methods that are optimal in accuracy for calculating singular integrals [44], solving weakly singular integral equations of Fredholm and Volterra [39], [11], [81].

At the II International Congress of Mathematicians, held from August 6 to August 12, 1900, D. Hilbert pronounced the famous report <Mathematical problems>[63], which largely determined development of mathematics in the 20th century. D. Hilbert's report formulated 23 Problems relating to all areas of mathematics: set theory (continuum problem), justification of mathematics, geometry, algebra, algebraic geometry, number theory, mathematical analysis, differential equations and calculus of variations.

Among the 23 problems formulated, the 13th problem sounded like this: prove that the equation is of the 7th degree $f^7 + xf^3 + yf^2 + zf + 1 = 0$ is not solvable using any continuous functions depending from only two arguments.

Formulating the problem, D. Hilbert assumed that the function $f(x, y, z)$, which is a solution to this equation, cannot be represented in the form of superpositions even continuous functions. That's why the A. N. Kolmogorov work [50] was sensational, in which he proved that every continuous function of n variables can be represented as a superposition of continuous functions of three variables.

In the next year, 1957, V. I. Arnold proved [2] that every continuous function of three variables can be represented in the form superpositions of

continuous functions of two variables: $f(x, y, z) = \sum_{i=0}^9 f_i(\varphi_i(x, y), z)$, where

all functions are continuous. Also in 1957, A. N. Kolmogorov showed [51] that every continuous function of two variables is representable superpositions of continuous functions of one variable and the operation of addition. Thus, A. N. Kolmogorov and V. I. Arnold proved the injustice of Hilbert's conjecture that the solution to the equation 7th degree cannot be represented by superpositions of continuous functions of two variables.

At the same time, A. N. Kolmogorov noted [52] that, apparently, D. Hilbert would be right if he considered the presentation of analytical functions of many variables by continuously differentiable functions of fewer variables. This remark known as the Kolmogorov problem: <there are analytic functions of three variables, not representable by superpositions of continuously differentiable functions two variables, and analytic functions of two variables, not representable superpositions of continuously differentiable functions of one variable and addition>.

This problem was solved by I. V. Boykov [8], [73], [9].

2. APPROXIMATE METHODS FOR CALCULATING SINGULAR AND HYPERSINGULAR INTEGRALS

One of the central directions in the scientific activity of the department is the construction and study of quadrature and cubature formulas for calculating regular, singular and hypersingular integrals in various formulations and on various classes of functions.

Let us first recall the definitions of singular integrals (SI) and hypersingular integrals (HI).

Definition 2.1. [41]. The principal value in the Cauchy sense of the singular integral $\int_a^b \frac{f(\tau)}{\tau - c} d\tau$, $a < c < b$, is called the limit

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-\eta} \frac{f(\tau)}{\tau - c} d\tau + \int_{c+\eta}^b \frac{f(\tau)}{\tau - c} d\tau \right].$$

Let us give the definition of multidimensional singular integrals. Let E_2 denote the two-dimensional Euclidean space, $t = (t_1, t_2)$, $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ – points of this space, $r(t, \tau) = ((t_1 - \tau_1)^2 + (t_2 - \tau_2)^2)^{1/2}$, $\theta = (\frac{t_1 - \tau_1}{r(t, \tau)}, \frac{t_2 - \tau_2}{r(t, \tau)})$.

It is easy to see that the point θ runs through a circle of radius one with center at point t . Let $\bar{\Omega}$ be the region in E_2 .

Definition 2.4 [62]. Multidimensional SI $M\varphi = \int_{\bar{\Omega}} \frac{f(\theta, t, \tau)\varphi(\tau)}{r^2(t, \tau)} d\tau_1 d\tau_2, t \in \Omega$,

is determined by the formula

$$M\varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Omega} \setminus S(t, \varepsilon)} \frac{f(\theta, t, \tau)\varphi(\tau)}{r^2(t, \tau)} d\tau_1 d\tau_2, t \in \Omega,$$

where $S(t, \varepsilon)$ is a circle of radius ε centered at the point t .

Questions of the existence of multidimensional SI in detail studied in [62]. First, let's focus on calculating SI with fixed singularities

$$J\varphi = \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau)}{\tau} d\tau. \quad (1)$$

Here as calculation methods quadrature formulas are used.

$$J\varphi = \sum_{k=-N}^N \left[\sum_{l=0}^p p_{kl} \varphi^{(l)}(t_k) + R_N(t_k, p_{kl}, \varphi) \right], \quad (2)$$

where $-1 \leq t_{-N} < \dots < t_{-1} \leq 0 \leq t_1 < \dots < t_N \leq 1$, \sum' means sum over $k \neq 0$.

Asymptotically optimal and optimal with respect to order quadrature formulas of the form (2) for calculating integrals (1) on classes of Hölder and Sobolev functions are constructed.

Let us dwell on the construction of optimal quadrature formulas.

Singular integral (1) is calculated using the quadrature formula (2) at $\rho = 0$. Here $-1 \leq t_{-N} < \dots < t_{-1} \leq 0 \leq t_1 < \dots < t_N \leq 1$, \sum' means summation over $k \neq 0$.

The quadrature formula (2) is considered in class $W^1(1)$ under two assumptions: a) $t_{-N} = -1$, $t_N = 1$, i.e. (2) Markov type formula; b) $-1 \leq t_{-N}$, $t_N \leq 1$.

Theorem 2.1 [30], [12]. Let $\rho = 0$. Among all possible quadrature formulas of Markov type, having the form (2), the optimal on the class $W^1(1)$, is the formula

$$\int_{-1}^1 \varphi(\tau) \tau^{-1} d\tau = \sum_{k=1}^{N-1} 2 \ln k + 1k \left[\varphi(k(k+1)N(N+1)) - \varphi(-k(k+1)N(N+1)) \right] + \quad (3)$$

$$+ \ln N + 1N[\varphi(1) - \varphi(-1)] + R_N(\varphi),$$

whose error is equal to $R_N[W^1(1)] = \frac{2}{N+1} + \frac{(4 + \ln N)}{N(N+1)}$.

Theorem 2.2 [30], [12]. Let $\rho = 0$. Among all possible quadrature formulas of the form (2) with nodes satisfying the condition $-1 \leq t_{-N} < \dots < t_{-1} \leq 0 \leq t_1 < \dots < t_N \leq 1$, the optimal quadrature formula on the class $W^1(1)$ is

$$\int_{-1}^1 \varphi(\tau) \tau^{-1} d\tau = \sum_{k=1}^N 2 \ln k + 1k \left[\varphi(k(k+1)(N+1)^2) - \varphi(-k(k+1)(N+1)^2) \right] + \quad (4)$$

$$+ R_N(\varphi),$$

whose error is equal to $R_N[W^1(1)] = \frac{2}{N+1} + \frac{(2 + \ln N)}{(N+1)^2}$.

Note. The above quadrature formulas are the only currently known optimal quadrature formulas for calculating SI.

Consider SI with the Hilbert kernel $F\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma-s}{2} d\sigma$,

which we will calculate using quadrature formulas of the kind $F\varphi = \sum_{k=1}^N \varphi(s_k) p_k(s) + R_N(s, s_k, p_k(s), \varphi)$ with knots $0 \leq s_k \leq 2\pi$ and

coefficients $p_k(s)$, $k=1,2,\dots,N$, and SI with the Cauchy kernel of the form $T\varphi = \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}$ ($t \in (-1,1)$), which we will calculate using quadrature formulas of the kind $T\varphi = \sum_{k=-N}^N \varphi(t_k)p_k(t) + R_N(t, t_k, \varphi)$, where $-1 \leq t_{-N} < \dots < t_{-1} < t_0 < t_1 < \dots < t_N \leq 1$.

To calculate singular integrals with Hilbert and Cauchy kernels, asymptotically optimal and optimal with respect to order quadrature formulas are constructed on the classes of Hölder and Sobolev functions.

Along with singular integrals, asymptotically optimal and optimal with respect to order cubature formulas are constructed for calculating polysingular and multidimensional singular integrals on the classes of Hölder and Sobolev functions.

Note that in [5] (see also [12]) a general method is proposed for estimating from below the errors in calculating integrals in convolutions using quadrature and cubature formulas. This method was used to estimate from below the constructed asymptotically optimal quadrature and cubature formulas for calculating singular, polysingular and multidimensional singular integrals. The same method was used to construct asymptotically optimal and optimal with respect to order passive algorithms for calculating hypersingular, polyhypersingular and multidimensional hypersingular integrals.

The following hypersingular integrals were considered.

Hypersingular integrals with a fixed singularity:

$$I\varphi = \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau^\nu}, \quad \nu = 2, 3, \dots; \quad F\varphi = \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau)d\tau}{|\tau|^{\nu+\alpha}}, \quad \nu = 2, 3, \dots, 0 < \alpha < 1.$$

To calculate the integrals $I\varphi$ and $F\varphi$ are used quadrature formulas

$$I\varphi = \sum_{k=-N}^N \sum_{l=0}^p p_{kl} \varphi^{(l)}(t_k) + R_N(p_{kl}, t_k, \varphi);$$

$$F\varphi = \sum_{k=-N}^N \sum_{l=0}^p p_{kl} \varphi^{(l)}(t_k) + R_N(p_{kl}, t_k, \varphi).$$

On function classes $W^r(1)$ and $W_p^r(1)$, $r \geq \nu$, $1 \leq p < \infty$ asymptotically optimal and optimal with respect to order quadrature formulas are constructed.

Hypersingular integrals with variable singularity.

Optimal with respect to order quadrature formulas for calculating integrals of the form are constructed
$$T\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(\sigma)}{\sin^p \frac{\sigma-s}{2}} d\sigma,$$

$$K\varphi = \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau)}{(\tau-t)^p} d\tau, \quad -1 < t < 1, \quad p \text{ is integer, } p = 2, 3, \dots$$

Optimal with respect to order cubature formulas for calculating integrals were constructed

$$I\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2}{\sin^{p_1} \frac{\sigma_1 - s_1}{2} \sin^{p_2} \frac{\sigma_2 - s_2}{2}}, \quad p_1, p_2 = 2, 3, \dots,$$

$$A\varphi = \int_{L_1} \int_{L_2} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)^{p_1} (\tau_2 - t_2)^{p_2}},$$

where L_1 and L_2 are closed smooth Lyapunov contours in complex planes.

For calculating bihypersingular integrals

$$A\varphi = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2)}{(\tau_1 - t_1)^{p_1} (\tau_2 - t_2)^{p_2}} d\tau_1 d\tau_2$$

constructed cubature formulas of the form

$$A\varphi = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M \sum_{i_1=0}^{p_1} \sum_{i_2=0}^{p_2} p_{kli_1 i_2} (t_1, t_2) \varphi^{(i_1, i_2)}(x_k, y_l) + R_{NM}(t_1, t_2; p_{kli_1 i_2}(t_1, t_2); x_k, y_l; \varphi)$$

on various classes of functions.

To calculate multidimensional hypersingular integrals

$$F\varphi = \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau_1, \dots, \tau_l)}{(\tau_1^2 + \dots + \tau_l^2)^{p/2}} d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_l, \quad p > l, \quad \text{optimal with respect to}$$

order cubature formulas on Sobolev spaces were constructed.

During the study of multilayer plates [76] a new type of hypersingular integrals was found $\iint_G \frac{f(\tau_1, \tau_2)}{\gamma(\tau_1, \tau_2)} d\tau_1 d\tau_2$, where the equation $\gamma(\tau_1, \tau_2) = 0$

has roots of r th order, $r = 3, 4, \dots$, curve $\gamma(\tau_1, \tau_2) = 0$ is located in the region G . Methods for calculating the above-mentioned hypersingular integral are described in [38].

3. SINGULAR AND HYPERSINGULAR INTEGRAL EQUATIONS

Approximate methods for solving singular and hypersingular integral (SIE) and (HIE) equations are the main direction in the scientific work of the department.

Methods of collocation and mechanical quadratures was considered for an approximate solution of the following types of SIE:

linear –

$$a(t)x(t) + \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{h(t, \tau)x(\tau)d\tau}{\tau - t} = f(t),$$

$$a(t)x(t) + \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{h(t, \tau)x(\tau)d\tau}{\tau - t} = f(t);$$

nonlinear

$$a(t, x(t)) + \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{h(t, \tau, x(\tau))d\tau}{\tau - t} = f(t),$$

$$a(t, x(t)) + \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{h(t, \tau, x(\tau))d\tau}{\tau - t} = f(t).$$

Here γ – is the unit circle with center at the origin.

The collocation and mechanical quadrature methods have been substantiated, and the convergence of the Newton-Kantorovich method has been proven. The justification is carried out in Hölder space and in the space of square-integrable functions.

The results obtained for the SIE are generalized to systems of singular integral equations and to singular integrodifferential equations.

Approximate solutions were constructed using collocation and mechanical quadrature methods for bisingular integral equations:

$$a(t_1, t_2)x(t_1, t_2) + \frac{b(t_1, t_2)}{\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{x(\tau_1, t_2)d\tau_1}{\tau_1 - t_1} + \frac{c(t_1, t_2)}{\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{x(t_1, \tau_2)d\tau_2}{\tau_2 - t_2} - \frac{d(t_1, t_2)}{\pi^2} \int_{\gamma_1 \gamma_2} \frac{x(\tau_1, \tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)} + \int_{\gamma_1 \gamma_2} h(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2)x(\tau_1, \tau_2)d\tau_1 d\tau_2 = f(t_1, t_2).$$

Here γ_i is the unit circle in the complex variable plane $Z_i, i = 1, 2$.

Approximate methods for solving nonlinear bisingular integral equations have been studied.

Computational schemes of collocation and mechanical quadrature methods were constructed and justified for approximate solution of following multidimensional SIEs

$$a(t)x(t) + \int_G \frac{\varphi(t, \theta)x(\tau)d\tau}{(r(t, \tau))^2} = f(t),$$

where

$$t = (t_1, t_2), \tau = (\tau_1, \tau_2), r(t, \tau) = ((t_1 - \tau_1)^2 + (t_2 - \tau_2)^2)^{1/2}, \theta = (t - \tau) / r(t, \tau), G$$

is a domain in R^2 .

Along with linear equations, approximate methods for solving the following types of nonlinear multidimensional SIEs have been studied:

$$a(t, x(t)) + \int_G \frac{\varphi(t, \theta, x(\tau))d\tau}{(r(t, \tau))^2} = f(t).$$

The results obtained in this direction are summarized in the monograph [11], which contains a detailed bibliography.

We note studies of solvability conditions for degenerate SIEs of the form

$$a(t)x(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{x(\tau)d\tau}{\tau - t} + \int_L h(t, \tau)x(\tau)d\tau = f(t),$$

for which $a^2(t) - b^2(t) \equiv 0, t \in L$.

Spline-collocation methods for solving the following types of hypersingular integral equations

$$a(t)x(t) + b(t) \int_{-1}^1 \frac{x(\tau)d\tau}{(\tau - t)^p} + \int_{-1}^1 h(t, \tau)x(\tau)d\tau = f(t);$$

$$a(t_1, t_2)x(t_1, t_2) + b(t_1, t_2) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{x(\tau_1, \tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)^{p_1} (\tau_2 - t_2)^{p_2}} +$$

$$+ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2)x(\tau_1, \tau_2)d\tau_1 d\tau_2 = f(t_1, t_2);$$

$$a(t_1, t_2)x(t_1, t_2) + b(t_1, t_2) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{x(\tau_1, \tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} +$$

$$+ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2)x(\tau_1, \tau_2)d\tau_1 d\tau_2 = f(t_1, t_2)$$

have been constructed and justified under various conditions imposed on the coefficients and kernels of the equations.

Projection methods for solving nonlinear hypersingular integral equations are constructed.

An overview of the results obtained is contained in the works [28], [18], [74].

4. THEORY OF MOTION STABILITY

One of the scientific areas actively developing at the department is stability and stabilization of movement. Were studied stability and asymptotic stability of systems of ordinary differential equations (ODE)

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(t, x(t)),$$

where

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T, \quad a(t, x(t)) = (a_1(t, x(t)), a_2(t, x(t)), \dots, a_n(t, x(t)))^T;$$

systems of linear ODEs with time-dependent delays

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij}(t)x_j(t - h_{ij}(t)), i = 1, 2, \dots, n,$$

with initial conditions $x_i(t) = \eta_i(t), i = 1, 2, \dots, n$, where $a_{ij}(t), b_{ij}(t), i, j = 1, 2, \dots, n$, are continuous functions; $h_{ij}(t)$ are continuous functions satisfying the following conditions:

$$0 < h_* \leq h_{ij} \leq h_{ij}(t) \leq H_{ij} \leq H^*, i, j = 1, 2, \dots, n, \quad \text{for} \quad 0 \leq t < \infty,$$

$\eta_i(t), i = 1, 2, \dots, n$, are continuous functions $-H^* \leq t \leq 0$;

systems of nonlinear ODEs with time-dependent delays

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = a_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) + b_i(t, x_1(t - h_{i1}(t)), \dots, x_n(t - h_{in}(t))), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

with initial conditions $x_i(t) = \eta_i(t), i = 1, 2, \dots, n$, where the functions $a_i(t, x_1, \dots, x_n), b_i(t, x_1, \dots, x_n), i = 1, 2, \dots, n$, are continuous with respect to the first variable and have partial derivatives satisfying the Lipschitz condition with respect to the remaining variables, $h_{ij}(t)$ – are continuous functions satisfying the following conditions:

$$0 < h_* \leq h_{ij} \leq h_{ij}(t) \leq H_{ij} \leq H^*, i, j = 1, 2, \dots, n, \quad \text{for} \quad 0 \leq t < \infty,$$

$\eta_i(t), i = 1, 2, \dots, n$, are continuous functions;

systems of linear and nonlinear parabolic equations.

Considered the systems of linear parabolic equations

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_i(t, x_1, x_2)}{\partial t} = & a_{i1}(t) \frac{\partial^2 u_1(t, x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + a_{i2}(t) \frac{\partial^2 u_1(t, x_1, x_2)}{\partial x_2^2} + a_{i3}(t) \frac{\partial^2 u_2(t, x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \\
& + a_{i4}(t) \frac{\partial^2 u_2(t, x_1, x_2)}{\partial x_2^2} + a_{i5}(t) u_1(t, x_1, x_2) + \\
& + a_{i6}(t) u_2(t, x_1, x_2) + b_{i1}(t) \frac{\partial^2 u_1(t - \eta_1(t), x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \\
& + b_{i2}(t) \frac{\partial^2 u_1(t - \eta_1(t), x_1, x_2)}{\partial x_2^2} + b_{i3}(t) \frac{\partial^2 u_2(t - \eta_2(t), x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \\
& + b_{i4}(t) \frac{\partial^2 u_2(t - \eta_2(t), x_1, x_2)}{\partial x_2^2} + b_{i5}(t) u_1(t - \eta_1(t), x_1, x_2) + \\
& + b_{i6}(t) u_2(t - \eta_2(t), x_1, x_2), i = 1, 2;
\end{aligned}$$

systems of linear parabolic equations with time-dependent delays

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_i(t, x)}{\partial t} = & a_{i1}(t) \frac{\partial^2 u_1(t, x)}{\partial x_1^2} + a_{i2}(t) \frac{\partial^2 u_1(t, x)}{\partial x_2^2} + a_{i3}(t) \frac{\partial^2 u_2(t, x)}{\partial x_1^2} + \\
& + a_{i4}(t) \frac{\partial^2 u_2(t, x)}{\partial x_2^2} + a_{i5}(t) u_1(t, x) + a_{i6}(t) u_2(t, x) + \\
& + b_{i1}(t) \frac{\partial^2 u_1(t, x_1 - \eta_1(t), x_2 - \eta_2(t))}{\partial x_1^2} + \\
& + b_{i2}(t) \frac{\partial^2 u_1(t, x_1 - \eta_1(t), x_2 - \eta_2(t))}{\partial x_2^2} + b_{i3}(t) \frac{\partial^2 u_2(t, x_1 - \eta_1(t), x_2 - \eta_2(t))}{\partial x_1^2} + \\
& + b_{i4}(t) \frac{\partial^2 u_2(t, x_1 - \eta_1(t), x_2 - \eta_2(t))}{\partial x_2^2} + \\
& + b_{i5}(t) u_1(t, x_1 - \eta_1(t), x_2 - \eta_2(t)) + b_{i6}(t) u_2(t, x_1 - \eta_1(t), x_2 - \eta_2(t)), \quad i = 1, 2.
\end{aligned}$$

at initial values $u_i(0, x) = \varphi_i(x), i = 1, 2, x = (x_1, x_2), -\infty < x_1, x_2 < \infty$; systems of nonlinear parabolic equations with time-dependent delays

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_i(t, x_1, x_2)}{\partial t} = & a_{i1}(t) \frac{\partial^2 u_1(t, x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \\
& + a_{i2}(t) \frac{\partial^2 u_1(t, x_1, x_2)}{\partial x_2^2} + a_{i3}(t) \frac{\partial^2 u_2(t, x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \\
& + a_{i4}(t) \frac{\partial^2 u_2(t, x_1, x_2)}{\partial x_2^2} + a_{i5}(t, u_1(t, x_1, x_2), u_2(t, x_1, x_2)) + \\
& + b_{i1}(t) \frac{\partial^2 u_1(t - \eta_1(t), x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \\
& + b_{i2}(t) \frac{\partial^2 u_1(t - \eta_1(t), x_1, x_2)}{\partial x_2^2} + b_{i3}(t) \frac{\partial^2 u_2(t - \eta_2(t), x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \\
& + b_{i4}(t) \frac{\partial^2 u_2(t - \eta_2(t), x_1, x_2)}{\partial x_2^2} + b_{i5}(t, u_1(t - \eta_1(t), x_1, x_2), u_2(t - \eta_2(t), x_1, x_2)), i = 1, 2.
\end{aligned}$$

with initial values

$$u_i(t, x_1, x_2) = \varphi_i(t, x_1, x_2), i = 1, 2, t \in [t_0 - H, t_0], -\infty < x_1, x_2 < \infty.$$

In addition to the above equations, the stability of solutions to systems of differential equations with a small parameter at the highest derivative, as well as the stability of solutions to systems of ODEs and systems of parabolic equations with fractional derivatives, have been studied.

The research is based on a generalization of the first Lyapunov method, which consists in constructing a family of linearized operators. Sufficient conditions stability of solutions of differential equations were obtained as a result of studying the norms and logarithmic norms of the operators included in these families. This method is also the basis for studies on motion stabilization. Using this approach the Brockett's problem was solved by I. V. Boykov [?]. A distinctive feature of the obtained sufficient conditions for the stability of solutions to systems of ODEs and systems of partial differential equations is that that they simultaneously cover both regular and all kinds of critical cases. A detailed presentation of the results obtained at the Department in this direction until 2007 is contained in the monograph by I. V. Boykov [15]. More recent results can be found in the publications [33], [17], [78], [19], which contain a fairly detailed bibliography.

4.1. Informatics

In 50–80s of the last century, Penza was one of the centers of computer technology in the USSR. At the Penza Research Institute of Mathematical Machines, a series of famous “Urals” was developed, work

was carried out on the development of analog computers and analog-digital complexes. The Department of HM took part in research on this topic. This period dates back to the publication of the book by I. I. Eterman² [71], one of the first publications in the world devoted to the design of analog computers and methods for solving systems of algebraic and differential equations on these machines. The book was translated into German and English and in 2005, due to the revived interest in analog computing technology, it was republished in English [85].

In the period from 1958 to 1960, B. A. Trakhtenbrot³, one of the founders of theoretical computer science in the USSR, an outstanding specialist in discrete mathematics and automata theory, worked at the department. While working at the department, B. A. Trakhtenbrot, together with N. E. Kobrinsky, organized a city seminar on the theory of automata. During the same period, they wrote the first book in the USSR on the theory of automata [67].

Currently, the department is studying the stability of neural networks with different topologies [15], [78], [32] and developing methods for solving mathematical physics equations using Hopfield neural networks [31], [21], [79].

In the period from 1993 to 2006, the department conducted research into optimal reliability circuits composed of unreliable elements. This line of research, dating back to John von Neumann, was extremely relevant at the dawn of the computer age, when computers were built from very unreliable elements, but has not lost its relevance today. This direction was developed by Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor M. A. Alekhina⁵ [1].

Currently Ph.D., Associate Professor Yu. F. Zakharova conducts research on information compression and cryptography, involving bachelors and masters students [45], [46].

5. NUMERICAL METHODS OF GEOPHYSICS

Researches in the field of geophysics are carried out in the following areas:

- a) optimal methods for approximating geophysical fields;
- b) optimal methods for solving the direct problem of gravity exploration;
- c) approximate methods for solving the inverse problem of gravity exploration;
- d) optimal methods for transforming potential fields.

In the serie of works by I. V. Boykov and A. I. Boykova [22], [23], [24] the smoothness of potential fields of various natures was studied. It is shown that potential fields of various origins are described by classes of

functions similar to the classes $Q_{r,\gamma}, B_{r,\gamma}$. Methods for approximating these fields that are optimal with respect to order of accuracy are constructed. These studies are summarized in the book [25].

In the serie of works (I. V. Boykov, A. I. Boykova, M. V. Kravchenko, V. I. Kryuchko, N. Yu. Kudryashova, A. V. Filippov) studied the smoothness of conjugate functions representable by singular integrals and multidimensional integrals of Cauchy type. Optimal methods for approximating conjugate functions are constructed. Similar studies were carried out for thermal fields [36].

Large series of works (I. V. Boykov, A. I. Boykova, M. V. Kravchenko, V. I. Kryuchko, N. Yu. Kudryashova, N. V. Moiko, V. A. Ryazantsev, A. V. Filippov, V. E. Shchukina) is devoted to solving inverse problems of logarithmic and Newtonian potentials in linear and nonlinear formulations. This cycle also includes work on the analytical continuation of gravitational and Laplace fields. These studies are partially reflected in the book [25].

The work [34] proposes a new formulation of the inverse problems of the logarithmic and Newtonian potential, which consists in the fact that in contact problems the boundary of an anomalous body, its density and depth are simultaneously determined. Analytical and numerical methods for solving this problem for logarithmic and Newtonian potentials are constructed.

6. INVERSE PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS

Along with inverse problems of gravity exploration, the department conducts research into inverse problems of mathematical physics. Particular attention is paid to inverse coefficient problems for parabolic equations [35]. Numerical methods have been constructed for solving inverse heat conduction problems [37], restoring boundary and initial conditions for a number of linear and nonlinear boundary and initial problems for parabolic equations [80].

7. MATHEMATICAL MODELS OF BIOLOGY, ECOLOGY AND ECONOMICS

This section provides a brief overview of the work in biology, ecology and economics carried out at the department.

The main attention is paid to mathematical models of immunology.

7.1. Mathematical models of immunology

In the monograph by G. I. Marchuk [61] proposed and studied a number of behavioral models immune system under various external influences.

The basic (or so called simplest) model is described by a system of differential equations

$$\begin{aligned}
\frac{dV(t)}{dt} &= (\beta - \gamma F(t))V(t), \\
\frac{dC(t)}{dt} &= \xi(m)\alpha V(t - \tau)F(t - \tau) - \mu_c(C(t) - C^*), \\
\frac{dF(t)}{dt} &= \rho C(t) - (\mu_f + \eta\gamma V(t))F(t), \\
\frac{dm}{dt} &= \sigma V(t) - \mu_m m(t),
\end{aligned} \tag{5}$$

where $V(t)$ is the concentration of pathogenic replicating antigens, $F(t)$ is antibody concentration, $C(t)$ is concentration of plasma cells, $m(t)$ is relative characteristics of the affected organ; coefficients and constants β , γ , $\xi(m)$, μ_c , C^* , τ , α , μ_m , σ , ρ , μ_f , η are non-negative.

The system (5) is studied under different initial conditions and, depending on the initial conditions, has different stationary solutions. One of them is the stationary solution, describing the state of a healthy body:

$$V(t_0) = 0, C(t_0) = C^*, F(t_0) = F^* = \rho C^* / \mu_f, m(t_0) = 0. \tag{6}$$

Other stationary solutions depend on the initial conditions.

The stability of the initial problem (5), (6) was investigated by the linearization method in [61]. It was shown that all small disturbances stationary solution of the Cauchy problem (5), (6), subject to the condition $\beta < \gamma F^*$, tend to zero over time, i.e. the stationary solution is asymptotically stable.

Beyond the basic immunology model G. I. Marchuk [61] proposed and studied mathematical models of the immune response to bacterial and viral infections.

In the serie of works by I. V. Boykov, Yu. F. Zakharova, A. A. Dmitrieva, generalizations of the basic model of immunology and models of the course of viral and bacterial diseases are proposed, which are in the following:

- a) logistic terms are introduced into the equations, taking into account “competition” between antibodies and antigen;
- b) model parameters depend on time.

The stability and asymptotic stability of the considered mathematical models are investigated. The influence of various therapies on the dynamics of processes in the immune system was studied.

7.2. Mathematical models of developing systems

A large class of problems in economics, ecology, medicine and in a number of others areas are described by models of developing systems introduced V. M. Glushkov and described in detail in [42]. The main mathematical apparatus for modeling developing systems is systems of nonlinear Volterra equations.

The two-product model is described by the system nonlinear Volterra integral equations

$$\begin{aligned} x(t) - \int_{y(t)}^t h(t, \tau) g(\tau) x(\tau) d\tau &= 0, \\ \int_{y(t)}^t k(t, \tau) [1 - g(\tau)] x(\tau) d\tau &= f(t), \quad 0 < t_0 \leq t \leq T \end{aligned} \quad (7)$$

with unknown functions $x(t) \in C_{[0, \infty]}$ and $y(t) \in C_{[t_0, \infty]}^1 (y(t) < t)$ and with given on the segment $[t_0, T]$ functions $h(t, \tau), k(t, \tau) \in C_{[0, \infty] \times [t_0, \infty]}$, $f(t), g(t) \in C_{[t_0, \infty]}$ ($0 < g(t) < 1$).

Along with two-product models, n – product models are also considered, which are described by nonlinear systems $n = r + p + 1$ of equations of the form

$$\begin{aligned} x_i(t) &= \sum_{j=1}^r \int_{y(t)}^t H_{ij}(t, \tau) x_j(\tau) d\tau, \quad i = \overline{1, r}, \\ f_i(t) &= \sum_{j=1}^r \int_{y(t)}^t K_{ij}(t, \tau) x_j(\tau) d\tau, \quad i = \overline{1, p}, \\ c(t) &= \sum_{i=1}^r x_i(t) + \sum_{i=1}^p f_i(t), \quad r + p + 1 = n, \end{aligned} \quad (8)$$

where the unknowns are the functions $x_i(t), i = \overline{1, r}$; $f_i(t), i = \overline{1, p}$ and $y(t)$; $0 \leq t_0 \leq t \leq T$, $y(t) < t$, $y(t) \geq y(t_0) = 0$; $x_i(t) = \varphi_i(t), t \in [0, t_0]$ is the given background.

Integral equations of the form (7), (8) have numerous applications and the need to develop numerical methods for solving them has been repeatedly emphasized in the literature (see, for example, [72]).

In the work [40] an approximate method was constructed for system solutions (7) on the interval $[t_0, T]$. The system is presented in the form

$$\begin{aligned}
P_1(x(t), y(t)) &\equiv x(t) - \int_{y(t)}^t H(t, \tau) x(\tau) d\tau = 0, \\
P_2(x(t), y(t)) &\equiv f(t) - \int_{y(t)}^t K(t, \tau) x(\tau) d\tau = 0,
\end{aligned}
\quad 0 < t_0 \leq t \leq T, \quad (9)$$

or in operator form

$$P(X) = (P_1(X), P_2(X)) = 0, \quad X = (x(t), y(t)). \quad (10)$$

Here $H(t, \tau) = h(t, \tau)g(\tau)$, $K(t, \tau) = k(t, \tau)[1 - g(\tau)]$, and the functions $H(t, \tau)$ and $K(t, \tau)$ are set equal to zero for $\tau \notin [t_0, T]$.

For an approximate solution of the equation (10), an iterative-projection method was constructed. The system of integral equations (10) using the technology of the mechanical quadrature method is approximated by a system of nonlinear algebraic equations. Under a number of conditions, the solvability of the approximating system is proved and the error is estimated. The solution is found using the modified Newton-Kantorovich method. Approximate methods for solving n-product models have been constructed and justified.

This research was continued in the work [83], in which a projection method for solving the two-product model was proposed.

Research on developing systems stimulated the development at the department of a direction for constructing numerical methods for solving Volterra integral equations. In the series of works by Ph.D., Associate Professor A. N. Tynda constructed approximate methods for solving linear and nonlinear Volterra integral equations with different characteristics of the kernels [84], [69].

8. IDENTIFICATION OF PARAMETERS OF DYNAMIC SYSTEMS

Dynamic systems described by linear and nonlinear integral equations in convolution, Fredholm and Volterra integral equations, systems of ordinary differential equations are considered. equations, systems of partial differential equations. ODEs and partial differential equations with fractional derivatives are considered. The task of parametric identification of dynamic systems is to determine the parameters of the systems under consideration according to one or more test signals. For each type of dynamic systems, numerical methods for determining their parameters have been constructed and justified. Parametric identification algorithms are based on one fairly general approach, which is a generalization of operational calculus.

Using boundary value problem methods Riemann and singular integral equations, the problem of simultaneous determination of the input signal and hardware (transfer) is solved functions. The results obtained in this direction have been published in series of articles by I. V. Boykov, I. V. Boykov and T. V. Cherusheva; I. V. Boykova and N. P. Krivulina. A review of the results obtained in this direction is given in the book by I. V. Boykova and N. P. Krivulina [29]. In addition to these areas, we note the work on biometric voice identification human [49].

9. ELECTRODYNAMICS AND MICROWAVE DEVICES

From 1987 to 2002 at the department, under the guidance of Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor Yu. G. Smirnov⁶, research was carried out on direct and inverse problems of wave scattering on surfaces with different topologies [65], [82], [66], [48]. Using the methods of multidimensional singular integral equations, questions of the existence and uniqueness of solutions to diffraction problems were studied; numerical methods were developed to obtain solutions, in particular, projection methods of the Galerkin type. In the current decade, the department has begun research on numerical methods for modeling antennas, in particular, on the application of hypersingular integral equations to the modeling of fractal antennas [75], [20].

10. ADDITIONS

Somewhat apart from the main directions of scientific research at the department are the works of Ph.D., Associate Professor I. I. Ryabtsev, who worked at the department in the 50–60s of the last century. I. I. Ryabtsev developed the original operational calculus, which arose at the junction of the theory of generalized functions (distributions) and algebraic operational calculus. The results obtained were summarized in his monograph [64].

11. NOTES

¹. Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor V. I. Levin – a graduate of the Berlin Higher Technical School, completed postgraduate studies at the University of Cambridge (student of G. Hardy, one of the leading mathematicians of the early 20th century); in 1949–1951 Head of the Department of Higher Mathematics of the PII. During this period, he obtained fundamental results on the asymptotic expansion of certain classes of functions; monographs [53], [54] have been written. In 1950 V. I. Levin constructed an asymptotic expansion $\zeta(x)$ of the Riemann function (for $x=1/2$) [55], thereby generalizing the results of S. Ramanujan. Later he published works [56], [57], dedicated to the life and work

of S. Ramanujan. Biographical sketch about the life and work of V. I. Levin published in [58].

². Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor I. I. Eterman worked at the Department of Higher and Applied Mathematics from 1956 to 1988, from 1956 to 1972 he headed the department. (a biographical sketch about I.I. Eterman was published in [59]).

³. Author of the monograph [43] Ph.D., Associate Professor V. P. Gribkova was a graduate student at the HM department in 1960;

⁴. Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor B. A. Trakhtenbrot worked at the Department of HM from 1958 to 1960. In 1960, after the creation of Akademgorodok in Novosibirsk, B. A. Trakhtenbrot, together with a number of his Penza students, left for Novosibirsk, where he created a large scientific school on the theory of automata. He created another school in Israel, where he moved in 1980. (A biographical sketch about B. A. Trakhtenbrot was published in [60].)

⁵. Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor M. A. Alekhina worked at the HAM department from 1993 to 2004. Currently, she is a professor at the Department of Mathematics at Penza State Technological University.

⁶. Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor Yu. G. Smirnov worked at the HAM department from 1987 to 2002. Currently, prof. Yu. G.. Smirnov heads the department of Mathematics and Supercomputer Modeling at Penza State University.

References

1. Alekhina M. A. Synthesis and complexity of reliable circuits in the $\{V, ^-\}$ basis for the same type of constant faults at the inputs of elements // Diskr. Mat. 2003. Vol. 15, iss. 1. P. 98–109.

2. Arnold V. I. On functions of three variables // Dokl. Academy of Sciences of the USSR. 1957. Vol. 114, iss. 4. P. 679–681.

3. Babenko K. I. On some problems of approximation theory and numerical analysis // Russian Math. Surveys. 1985. Vol. 40, iss. 1. P. 3–28.

4. Babenko K. I. Fundamentals of numerical analysis. Moscow ; Izhevsk : Scientific Research Center Regular and chaotic dynamics, 2002. 848 p.

5. Boykov I. V. Optimal with respect to accuracy algorithms for approximate calculations singular integrals. Saratov : Publishing house of Saratov State University, 1983. 210 p.

6. Boykov I. V. Optimal with respect to accuracy algorithms for calculating integrals // Between the university collection of scientific works "Optimal calculation methods and their application". Penza : Penza Politekh. Institute, 1987. Iss 8. P. 4–22.

7. Boykov I. V. Approximation of some classes of functions local splines // Journal of Computational Mathematics and mathematical physics. 1998. Vol. 38, iss. 1. P. 25–33.
8. Boykov I. V. On Kolmogorov's problem on the representation of analytical functions of several variables by superpositions continuously differentiable functions of a smaller number of variables // Bulletin of OGGGGN RAS. 2000. № 3 (13). URL: <http://www.scgis.ru/russian/cp1251/h.dgggms/3–2000/boikov.htm.begin>
9. Boykov I. V. On Kolmogorov's problem about the impossibility representations of analytical functions of many variables by superpositions of continuously differentiable functions of a smaller number of variables // University proceedings. Volga region. Natural Sciences. 2002. № 1. P. 5–14.
10. Boykov I. V. To the problem of K. I. Babenko on the asymptotics of the error numerical solutions of elliptic equations // University proceedings. Volga region. Natural Sciences. 2003. № 6. P. 3–29.
11. Boykov I. V. Approximate solution of singular integral equations. Penza : Penza State University Publishing House, 2004. 316 p.
12. Boykov I. V. Approximate methods for calculating singular and hypersingular integrals. Part one. Singular integrals. Penza : Penza State University Publishing House, 2005. 360 p.
13. Boykov I. V. On the Brockett stabilization problem // Avtomat. and telemekh. 2005. Iss. 5. P. 76–82.
14. Boykov I. V. Optimal methods for approximating functions and calculating integrals. Penza : Penza State University Publishing House, 2007. 236 p.
15. Boykov I. V. Stability of solutions of differential equations. Penza : Penza State University Publishing House, 2008. 244 p.
16. Boykov I. V. Approximate methods for calculating singular and hypersingular integrals. Part two. Hypersingular integrals. Penza : Penza State University Publishing House, 2009. 252 p.
17. Boykov I. V. Stability of steady-state solutions of systems of nonlinear nonautonomous differential equations with delays // Differential equations. 2018. Vol. 54, № 4. P. 435–457.
18. Boykov I. V. Analytical and numerical methods for solving hypersingular integral equations // Dynamic Systems. 2019. Vol. 9 (37), № 3. P. 244–272.
19. Boykov I. V. Stability of solutions of parabolic systems equations with delays // University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences. 2023. № 1. P. 69–84. doi: 10.21685/2072-3040-2023-1-6
20. Boykov I. V., Aikashev P. V. Application of the continuous operator method to solving the Pocklington and Gallen equations for thin wire antennas // University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences. 2020. № 3 (55). P. 131–150. doi: 10.21685/2072-3040-2020-3-10
21. Boykov I. V., Baulina O. A. Approximate solution of integral equations using Hopfield neural networks // Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva. 2013. Vol. 15, № 1. P. 41–51.
22. Boykov I. V., Boykova A. I. Optimal methods recovery potential fields // Izvestia RAS. Physics of the Earth. 1998. № 8. P. 70–78.

23. Boykov I. V., Boykova A. I. Optimal restoration methods potential fields. I // *Izvestia RAS. Physics Earth*. 2001. № 12. P. 78–89.
24. Boykov I. V., Boykova A. I. Accuracy-optimal methods for reconstructing potential fields. II // *Izvestia RAS. Physics of the Earth*. 2003. № 3. P. 87–93.
25. Boykov I. V., Boykova A. I. Approximate methods for solving direct and inverse problems of gravity exploration. Penza : Penza State University Publishing House, 2013. 510 p.
26. Boykov I. B., Zakharova Yu. F., Dmitrieva A. A. Stability of the simplest mathematical model of immunology // *University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences. Mathematics*. 2008. № 4. P. 32–46.
27. Boykov I. B., Zakharova Yu. F., Dmitrieva A. A. Stability of models of antiviral and antibacterial immune response // *University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences. Mathematics*. 2008 № 4. P. 47–57.
28. Boykov I. V., Dobrynina N. F., Domnin L. N. Approximate calculation methods Hadamard integrals and solutions of hypersingular integral equations. Penza : Publishing house Penza State Technical University, 1996. 188 p.
29. Boykov I. V., Krivulin N. P. Analytical and numerical methods for identifying dynamic systems. Penza : Publishing house of Penza State University, 2016. 398 p.
30. Boykov I. V., Rudenko A. K. On optimal quadrature formulas for calculating singular integrals // *Interuniversity. Sat. scientific tr.* 1979. Iss. 1. P. 21–30.
31. Boykov I. V., Rudnev V. A., Boykova A. I. Approximate solution of problems of mathematical physics using Hopfield neural networks // *Neurocomputers, development, application*. 2013. № 10. P. 13–22.
32. Boykov I. V., Rudnev V. A., Boykova A. I. Stability of Cohen–Grossberg neural networks with time-dependent delays // *University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2023. № 2. P. 41–58. doi: 10.21685/2072-3040-2023-2-5
33. Boykov I. V., Ryazantsev V. A. Turing stability of dynamic systems described by equations with fractional derivatives // *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*. 2012. Vol. 14, № 1. P. 1–9.
34. Boykov I. V., Ryazantsev V. A. On the issue of simultaneous restoration of density and surface equation in the inverse problem of gravimetry for a contact surface // *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*. 2020. № 3. P. 289–308.
35. Boykov I. V., Ryazantsev V. A. On one approximate method for solving the inverse coefficient problem for the heat equation // *Siberian Journal of Industrial Mathematics*. 2021. Vol. 24, № 2. P. 1–16.
36. Boykov I. V., Ryazantsev V. A. On the issue of optimal approximation of geophysical fields // *Siberian Journal of Computational Mathematics*. 2021. Vol. 24, № 1. P. 17–34.
37. Boykov I. V., Ryazantsev V. A. About one approximate method solutions to the inverse heat transfer problem // *University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2023. № 2. P. 31–40. doi: 10.21685/2072-3040-2023-2-4

38. Boykov I. V., Semov M. A. On one method for calculating hypersingular integrals // *Izvestia of Universities*. 2016. № 3. P. 3–17.
39. Boykov I. V., Tynda A. N. Accuracy-optimal approximate solution methods Volterra integral equations // *Differential equations*. 2002. № 9. P. 1215–1232.
40. Boykov I. V., Tynda A. N. Approximate solution of nonlinear integral equations of the theory of developing systems // *Differential equations*. 2003. Vol. 39, № 9. P. 1214–1223.
41. Gakhov F. D. Boundary value problems. M. : Nauka, 1963. 640 p.
42. Glushkov V. M., Ivanov V. V., Yanenko V. M. Modeling of developing systems. M. : Science, 1983. 352 p.
43. Gribkova V. P. Efficient methods of uniform approximations based on Chebyshev polynomials. M. : Publishing house: Sputnik+, 2017.
44. Zakharova Yu. F. Optimal methods for calculating multidimensional singular integrals and solving singular integral equations : Diss. candidate of physical and mathematical sciences : 05.13.18. Mordovian State University, 2004.
45. Zakharova Yu. F., Kochneva A. A. Protection issues information when using virtualization technologies // *Mathematical and computer modeling natural scientific and social problems : materials XV International Scientific and Technical Conference young professionals, graduate students and students Russia (Penza, June 1–4, 2021)* / ed. by Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor I. V. Boykov. P. 183–187.
46. Zakharova Yu. F., Makarova S. E. Features cryptographic algorithms based on multidimensional quadratic systems // *Mathematical and computer modeling natural scientific and social problems : materials XV International Scientific and Technical Conference young professionals, graduate students and students Russia (Penza, June 1–4, 2021)* / ed. by Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor I. V. Boykov. P. 193–198.
47. Research on the theory of dynamic gravimetry. M. : Institute of Physics of the Earth, USSR Academy of Science, 1977. 272 p.
48. Ilyinsky A. S., Smirnov Yu. G. Diffraction of electromagnetic waves on conductive thin screens. M. : Publishing house. Enterprise of the editorial office of the magazine “Radio Engineering”, 1996. 176 p.
49. Kalashnikov D. M. Biometric voice identification person by voice passphrase in conditions of increased noise : abstract dissertations for an academic degree candidate of technical sciences : 05.13.01. Penza : Penza State University, 2017.
50. Kolmogorov A. N. On the representation of continuous functions of several variables are superpositions of functions of fewer variables // *Dokl. Academy of Sciences of the USSR*. 1956. Vol. 108. P. 179–182.
51. Kolmogorov A. N. About the representation of continuous functions several variables in form superpositions continuous functions one variable and addition // *Dokl. Academy of Sciences of the USSR*. 1957. Vol. 114. P. 953–956.
52. Kolmogorov A. N. Selected works. Mathematics and Mechanics. M. : Science, 1985. 470 p.
53. Levin V. I., Grosberg Yu. M. Differential equations of mathematical physics. M. ; L. : Gostekhizdat, 1951. 576 p.

54. Levin V. I., Fuks B. A. Functions of a complex variable and some of their applications. M. : L. Gostekhizdat, 1951. 308 p.
55. Levin V. I. Concerning one problem of S. Ramanujan // *Uspekhi Mat. Nauk.* 1950. Vol. 5, № 3 (37). P. 161–166.
56. Levin V. I. Life and work of the Indian mathematician S. Ramanujan // *Historical and mathematical studies* / ed. by G. F. Rybkin and A. P. Yushkevich. Iss. XIII. M. : GITTL, 1960. 564 p.
57. Levin V. I. Ramanujan – the mathematical genius of India. M. : Znanie, 1968. 48 p.
58. Levin V. I. Viktor Iosifovich Levin. Scientist, teacher, educational organizer // *Analytical and numerical methods for modeling natural science and social problems : collection of articles based on the materials of the XVII All-Russian scientific and technical conference with international participation (Penza, Russia, November 28 – December 3, 2022)* / ed. by Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor I. V. Boykov. P. 190–195.
59. Levin V. I. To the 100th anniversary of I. I. Eterman, a prominent teacher and scientist // *Mathematical and computer modeling of natural science and social problems : materials of the XV International Scientific and Technical Conference of Young Specialists, Postgraduates and Students (Russia, Penza, June 1–4, 2021)* / ed. by Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor I. V. Boykov. P. 233–239.
60. Levin V. I. To the 100th anniversary of B. A. Trakhtenbrot, an outstanding scientist and teacher // *Analytical and numerical methods for modeling natural science and social problems Collection of articles based on the materials of the XVII All-Russian scientific and technical conference with international participation (Russia, Penza, December 1–4, 2021)* / ed. by Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor I. V. Boykov. P. 159–164.
61. Marchuk G. I. Mathematical models in immunology. Computational methods and experiments. M. : Science, 1991. 304 p.
62. Mikhlin S. G. Multidimensional singular integrals and integrals equations. M. : Fizmatgiz, 1962. 254 p.
63. Hilbert's problems / ed. P. S. Alexandrova. M. : Nauka, 1969. 240 p.
64. Ryabtsev I. I. Method of perfect operators. Saratov : Publishing house of Saratov State University, 1978. 101 p.
65. Smirnov Yu. G. On the Fredholm property of a system of pseudodifferential equations in the problem of diffraction on a limited screen // *Differential equations.* 1992. Vol. 28, № 1. P. 136–143.
66. Smirnov Yu. G. On the solvability of vector integrodifferential equations in the problem of diffraction of an electromagnetic field on screens of arbitrary shape // *Zhurn. Comput. and math. physics.* 1994. Vol. 34, № 10. P. 1461–1475.
67. Trakhtenbrot B. A., Kobrinsky N. E. Introduction to the theory of finite state machines. M. : IFML, 1962. 405 p.
68. About one direct method for solving a system of nonlinear integral equations of two-sector economic models // *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva.* 2006. Vol. 8, № 1. P. 314–319.

69. Tynda A. N. Methods for numerical analysis of some integral dynamic systems with retarded arguments // *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*. 2023. Vol. 25, № 1. P. 565–577. doi: 10.15507/2079-6900.25.202301.565-577
70. Eterman I. I. Asymptotic methods in applied mathematics. Penza : PPI Publishing House, 1973. 264 p.
71. Eterman I. I. Continuous mathematical machines. M. : Mashgiz, 1957. 236 p.
72. Baker C. T. H. A perspective on the numerical treatment of Volterra equations // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2000. Vol. 125. P. 217–249
73. Boikov I. V. Solution of Kolmogorov Problem an Representation of Analytical Functions of Many Variables by Superpositions of Continuously Differentiable Functions with Less Number of Variables // *Herald of the DGGGMS RAS*. 2000. № 3 (13). URL: <http://www.scgics.ru/russian/cp1251/hdgggms/3-2000/boikovengl.htm>.begin
74. Boykov I. V. Approximate Methods for Solving Hypersingular integral Equations // *Topics in Integral and Integro-Difference Equations. Theory and Applications* / ed. by Harenfra Singh, Hemen Dutta, Marcelo M. Cavalcanti : Springer, 2021. P. 63–102.
75. Boykov I., Aikashev P. To the numerical method for synthesis of fractal antennas // 2019 International Seminar on Electron Devices Design and Production (SED 2019). Prague, Czech Republic 23–24 April 2019. IEEE Catalog Number: ISBN: CFP19P59-POD 978-1-5386-5851-2 P. 119–125.
76. Boykov I. V., Boykova A. I., Ventsel E. S. Fundamental Solutions for Thick Sandwich Plate // *Engineering Analysis and Boundary Elements*. 2004. Vol. 28. P. 1437–1444.
77. Boykov I. V., Zakharova J. F., Dmitrieva A. A., Prostova N. V. Stability of mathematical models of immunology // *Analytical and Numerical Methods of Modelling of Natural Science and Social Problems (ANM-2017) Proceedings of the Twelfth International Conference ANM-2017 (Penza, Russian Federation, 4–6 December, 2017)* / ed. by I. V. Boykov. P. 87–108.
78. Boykov I., Roudnev V., Boykova A. Stability of Solutions to Systems of Nonlinear Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Sides: Applications to Hopfield Artificial Neural Networks. *Mathematics*. 2022. Vol. 10. P. 1524. doi :10.3390/math10091524
79. Boykov I., Roudnev V., Boykova, A. Approximate Methods for Solving Problems of Mathematical Physics on Neural Hopfield Networks // *Mathematics*. 2022. Vol. 1. doi: 10.3390/math10132207
80. Boykov I. V., Ryazantsev V. A. On the problem of recovering boundary conditions in the third boundary value problem for parabolic equation // *University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2021. № 2. P. 3–13. doi: 10.21685/2072-3040-2021-2-1
81. Boykov I. V., Tynda A. N. Numerical methods of optimal accuracy for weakly singular Volterra integral equations // *Annals of functional Analysis*. 2015. Vol. 6, № 4. P. 114–133. doi: 10.15352/afa/06-4-114

82. Smirnov Yu. G. Method of Singular Integral. Operator-Functions for the Transmission Line Problem // Electromagnetics. 1993. Vol. 14, № 2. P. 145–156.

83. Tynda A. N. On one direct method for solving a system of nonlinear integral equations of two-sector economic models // Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva. 2006. Vol. 8, № 1. P. 314–319.

84. Aleksandr N. Tynda, Samad Noeiaghdam, Denis N. Sidorov, Polynomial spline collocation method for solving weakly regular Volterra integral equations of the first kind // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2022. Vol. 39. P. 62–79. doi: 10.26516/1997-7670.2022.39.62

85. Eterman I. I. Analogue Computers. New York : Pergamon press, 2005.

2. УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

УДК 517.957

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ МАЛОГО ПАРАМЕТРА НА СКОРОСТЬ СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ

*Ольга Александровна Васильева¹,
Георгий Алексеевич Филиппов²*

^{1,2} Московский государственный строительный университет,
Москва, Россия

¹ vasilievaoa@mgsu.ru, ² g.philippov@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается математическая модель автокаталитической реакции, проводимой в бесконечном цилиндре. Математическая модель описывается задачей Коши для нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, содержащих малый параметр при нелинейных членах. Проведено численное исследование зависимости скорости стабилизации математической модели от малого параметра.

Ключевые слова: система уравнений Карлемана, малый параметр, математическая модель

STUDY OF THE INFLUENCE OF A SMALL PARAMETER ON THE SPEED OF STABILIZATION OF SOLUTION TO ONE CAUCHY PROBLEM.

Olga A. Vasil'eva¹, Georgiy A. Filippov²

^{1,2} Moscow State University of Civil Engineering,
Moscow, Russia

¹ vasilievaoa@mgsu.ru, ² g.philippov@yandex.ru

Abstract. A mathematical model of an autocatalytic reaction occurring in an infinite cylinder is considered. The mathematical model is described by the Cauchy problem for a nonlinear system of first-order partial differential equations containing a small parameter for the nonlinear terms. A numerical study of the rate of stabilization of the mathematical model with respect to a small parameter was carried out.

Keywords: system of Carleman equations, small parameter, mathematical model

Рассматривается математическая модель автокаталитической реакции, проводимой в бесконечном цилиндре. Математическая модель

описывается задачей Коши для нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, содержащий малый параметр при нелинейных членах. Система уравнений является кинетической системой уравнений Карлемана. В работах [1–6] показано, что решение задачи Коши для положительных начальных условий, описывающих плотности двух химических реагентов, стабилизирующихся к стационарному решению задачи. Целью данной работы является исследование зависимости скорости стабилизации решения от малого параметра системы Карлемана.

Поскольку задача является нелинейной, то для её исследования применяется численный метод. Применение численного метода позволяет получить не только качественную, но и количественную зависимость скорости стабилизации от малого параметра.

Рассмотрим математическую модель

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} &= \varepsilon(u^2 - w^2) \\ \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial x} &= -\varepsilon(u^2 - w^2)\end{aligned}\quad (1)$$

$$u(0, x) = u^0(x), w(0, x) = w^0(x) \quad (2)$$

где $u(x, t)$, $w(x, t)$ – плотности реагентов в точке x в момент времени t ; ε – малый параметр, а начальные условия удовлетворяют следующим условиям – $u_0(x) > 0$ и $w_0(x) > 0$, $u_0(x)$ и $w_0(x)$ – периодические с периодом 1 функции и

$$\int_0^1 u^0(x) dx = \int_0^1 w^0(x) dx = c.$$

Система уравнений (1) с начальными условиями

$$u(0, x) = c, w(0, x) = c \quad (3)$$

Имеет стационарное решение

$$u_s(t, x) = c, w_s(t, x) = c$$

Называемое положением равновесия для химической реакции (реакция завершена)

Решение изучаемой задачи Коши (1)(2), стремится к решению задачи (1)–(3), происходит стабилизация. Скорость (время) стабилизации существенно зависит от малого параметра ε . При уменьшении ε время стабилизации увеличивается, причем время $T \rightarrow \infty$, при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для различных видов начальных условий проведено численное исследование зависимости времени (скорости) стабилизации от малого параметра задачи ε .

За меру приближения к положению равновесия возьмем

$$E(t) = \sqrt{\int_0^1 (u(t, x) - u_s(x))^2 + (w(t, x) - w_s(x))^2 dx}$$

На рис. 1 для начального условия

$$u(0, x) = 1 + 0,1 \sin(2\pi x)$$

$$w(0, x) = 1$$

Приведены зависимости от ε времени приближения решения задачи к положению равновесия. Кривые соответствуют 10 %, 5 % и 3 % точности приближения соответственно.

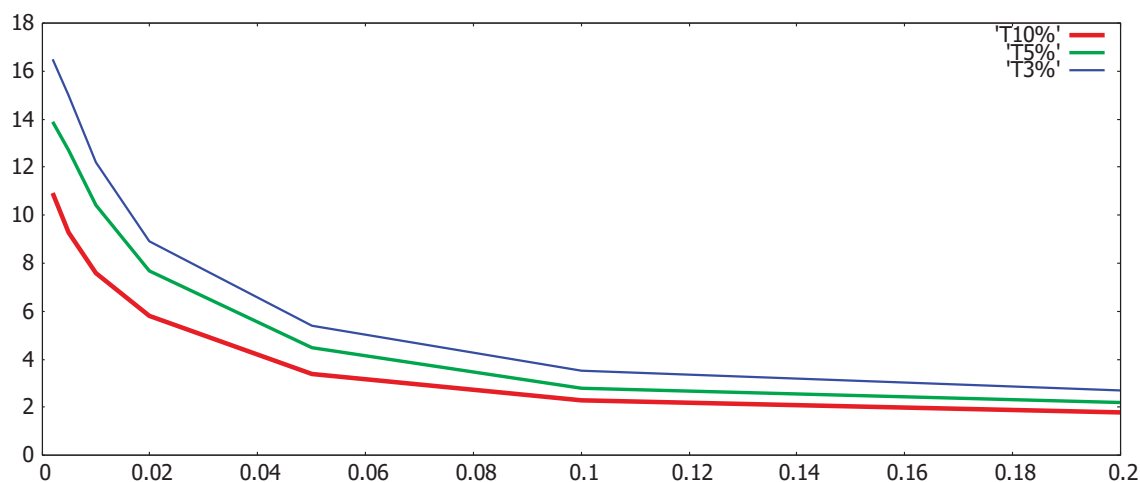


Рис. 1. График зависимости малого параметра к положению равновесия

Список литературы

1. Радкевич Е. В. О дискретных кинетических уравнениях // Доклады Академии наук. 2012. Т. 447, № 4. С. 369.
2. Aristov V., Ilyin O. Kinetic model of the spatio-temporal turbulence // Phys. Let. A. 2010. Vol. 374. P. 4381–4384.
3. Vasil'eva O. Some results of numerical investigation of the Carleman system // Procedia Engineering. 2015. Vol. 111. P. 834–838.
4. Васильева О. А. Численное исследование системы уравнений Карлемана // Вестник МГСУ. 2015. № 6. С. 7–15.
5. Vasil'eva O. A. Verification of the building materials production process mathematical model // J. Phys. Conf. Ser. 2020. Vol. 1030. doi: 10.1088/1757-809X/1030/1/012009
6. Васильева О. А., Филиппов Г. А. О моделировании процесса производства строительных материалов // Вестник Поволжья. 2022. № 5. С. 1–2.

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ВЫРАЖАЮЩИМИСЯ ЧЕРЕЗ ДВЕ ЗАДАННЫЕ ФУНКЦИИ

Андрей Петрович Шилин

Белорусский государственный университет,
Минск, Республика Беларусь
a.p.shilin@gmail.com

Аннотация. Рассматривается линейное гиперсингулярное интегро-дифференциальное уравнение первого порядка на замкнутой кривой, расположенной на комплексной плоскости. Коэффициенты уравнения выражаются по некоторым формулам через две заданные функции. Указываются в явном виде условия разрешимости уравнения. При их выполнении приводится в явном виде формула решения уравнения. Используются обобщенные формулы Сохоцкого, теория краевой задачи Римана, формулы решения линейного дифференциального уравнения.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, обобщенные формулы Сохоцкого, краевая задача Римана, линейное дифференциальное уравнение

SOLUTION OF AN INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH COEFFICIENTS EXPRESSED IN TERMS OF TWO GIVEN FUNCTIONS

Andrey P. Shilin

Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus
a.p.shilin@gmail.com

Abstract. A linear hypersingular first-order integro-differential equation on a closed curve located on the complex plane is considered. The coefficients of the equation are expressed by some formulas in terms of two given functions. The conditions for the solvability of the equation are indicated explicitly. When they are reformed, the formula for solving the equation is given in explicit form. The generalized formulas of Sokhotsky, the theory of the Riemann boundary value problem, formulas for solving linear differential equations are used.

Keywords: integro-differential equation, generalized Sokhotsky formulas, Riemann boundary problem, linear differential equation

Пусть L – простая гладкая замкнутая положительно ориентированная кривая на комплексной плоскости, а D_+ и D_- – соответственно

внутренняя и внешняя области комплексной плоскости по отношению к этой кривой. Зададим комплексные функции $p(t), q(t), f(t)$, удовлетворяющие наряду с производными $p'(t), q'(t)$ условию Гельдера, $t \in L$. Будем искать на кривой L комплексную функцию $\varphi(t)$, удовлетворяющую вместе с производной $\varphi'(t)$ условию Гельдера и являющуюся решением уравнения

$$\begin{aligned} & \left(p(t)q(t) - \frac{1}{\pi^2} \int_L \frac{p(\tau)d\tau}{\tau-t} \int_L \frac{q(\tau)d\tau}{\tau-t} \right) \varphi'(t) - \left(p'(t)q'(t) - \frac{1}{\pi^2} \int_L \frac{p(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} \int_L \frac{q(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} \right) \varphi(t) - \\ & - \left(\frac{p(t)}{\pi^2} \int_L \frac{q(\tau)d\tau}{\tau-t} + \frac{q(t)}{\pi^2} \int_L \frac{p(\tau)d\tau}{\tau-t} \right) \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} + \\ & + \left(\frac{p'(t)}{\pi^2} \int_L \frac{q(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} + \frac{q'(t)}{\pi^2} \int_L \frac{p(\tau)d\tau}{(\tau-t)^2} \right) \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t} = f(t), \quad t \in L, \end{aligned} \quad (1)$$

в котором интегралы с $\tau-t$ понимаются в смысле главного значения по Коши, а с $(\tau-t)^2$ – в смысле конечной части по Адамару. Уравнение (1) замечательно тем, что допускает точное аналитическое решение. Близкие уравнения решены в [1, 2].

Введем с помощью интегралов типа Коши кусочно-аналитические функции

$$\Phi_{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-z}, \quad P_{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{p(\tau)d\tau}{\tau-z}, \quad Q_{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{q(\tau)d\tau}{\tau-z}, \quad z \in D_{\pm}.$$

Предельные значения этих функций слева и справа на кривой L вместе с предельными значениями их производных существуют и удовлетворяют условию Гельдера, причем справедливы классические и обобщенные [3] формулы Сохоцкого

$$\begin{aligned} & \varphi^{(k)}(t) = \Phi_+^{(k)}(t) - \Phi_-^{(k)}(t), \\ & p^{(k)}(t) = P_+^{(k)}(t) - P_-^{(k)}(t), \quad q^{(k)}(t) = Q_+^{(k)}(t) - Q_-^{(k)}(t), \quad \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{k+1}} = \Phi_+^{(k)}(t) + \Phi_-^{(k)}(t), \\ & \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{p(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{k+1}} = P_+^{(k)}(t) + P_-^{(k)}(t), \quad \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{q(\tau)d\tau}{(\tau-t)^{k+1}} = Q_+^{(k)}(t) + Q_-^{(k)}(t), \quad k = 0, 1, \quad t \in L. \end{aligned} \quad (2)$$

На основании этих формул уравнение (1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & ((P_+(t) - P_-(t))(Q_+(t) - Q_-(t)) + (P_+(t) + P_-(t))(Q_+(t) + Q_-(t)))(\Phi'_+(t) - \Phi'_-(t)) - \\ & - ((P'_+(t) - P'_-(t))(Q'_+(t) - Q'_-(t)) + (P'_+(t) + P'_-(t))(Q'_+(t) + Q'_-(t)))(\Phi_+(t) - \Phi_-(t)) + \\ & + ((P_+(t) - P_-(t))(Q_+(t) + Q_-(t)) + (P_+(t) + P_-(t))(Q_+(t) - Q_-(t)))(\Phi'_+(t) + \Phi'_-(t)) - \\ & - ((P'_+(t) - P'_-(t))(Q'_+(t) + Q'_-(t)) + (P'_+(t) + P'_-(t))(Q'_+(t) - Q'_-(t)))(\Phi_+(t) + \Phi_-(t)) = \\ & = f(t), \quad t \in L. \end{aligned}$$

После раскрытия скобок многие слагаемые взаимно уничтожатся, в результате получится

$$4(P_+(t)Q_+(t)\Phi'_+(t) - P_-(t)Q_-(t)\Phi'_-(t) - P'_+(t)Q'_+(t)\Phi_+(t) + P'_-(t)Q'_-(t)\Phi_-(t)) = f(t), \quad t \in L. \quad (3)$$

Соотношение (3) можно расценивать как краевую задачу Римана о скачке

$$\Psi_+(t) - \Psi_-(t) = \frac{f(t)}{4}, \quad t \in L, \quad (4)$$

для функций

$$\Psi_+(z) = P_+(z)Q_+(z)\Phi'_+(z) - P'_+(z)Q'_+(z)\Phi_+(z), \quad z \in D_+, \quad (5)$$

$$\Psi_-(z) = P_-(z)Q_-(z)\Phi'_-(z) - P'_-(z)Q'_-(z)\Phi_-(z), \quad z \in D_-. \quad (6)$$

Будем считать в дальнейшем для простоты, что

$$P_{\pm}^{(k)}(z) \neq 0, \quad Q_{\pm}^{(k)}(z) \neq 0, \quad z \in D_{\pm} \cup L, \quad z \neq \infty, \quad k = 0, 1.$$

Пусть суммарный порядок нулей на бесконечности функций $P_-(z)$, $Q_-(z)$ равен l . Считая порядок нуля на бесконечности у функции $\Phi_-(z)$ большим или равным 1, из формулы (6) легко усмотреть, что задачу (4) надо решать в классе кусочно-аналитических функций, имеющих на бесконечности нули по меньшей мере порядка $l+2$. Согласно [4] для решения задачи (4) необходимо и достаточно выполнение условий

$$\int_L f(t)t^k dt = 0, \quad k = \overline{0, l}. \quad (7)$$

Считаем эти условия выполненными, и тогда

$$\Psi_{\pm}(z) = F_{\pm}(z), \quad F_{\pm}(z) = \frac{1}{8\pi i} \int_L \frac{f(\tau)d\tau}{\tau - z}, \quad z \in D_{\pm}.$$

Теперь найдем из равенств (5), (6) функции $\Phi_{\pm}(z)$ как решения линейных дифференциальных уравнений. В результате получим

$$\begin{aligned} \Phi_{\pm}(z) = & \left(\int_{z_{\pm}}^z \frac{F_{\pm}(\zeta)}{P_{\pm}(\zeta)Q_{\pm}(\zeta)} \exp \left(- \int_{z_{\pm}}^{\zeta} \frac{P'_{\pm}(\sigma)Q'_{\pm}(\sigma)d\sigma}{P_{\pm}(\sigma)Q_{\pm}(\sigma)} \right) d\zeta + C_{\pm} \right) \times \\ & \times \exp \left(\int_{z_{\pm}}^z \frac{P'_{\pm}(\zeta)Q'_{\pm}(\zeta)d\zeta}{P_{\pm}(\zeta)Q_{\pm}(\zeta)} \right), \quad z \in D_{\pm}, \end{aligned} \quad (8)$$

где z_{\pm} — фиксированные точки в соответствующих областях D_{\pm} , $C_{\pm} \in \mathbb{C}$. В дальнейшем удобно брать $z_- = \infty$, чтобы анализировать поведение функции $\Phi_-(z)$ на бесконечности. Тогда очевидно, что для выполнения

равенства $\Phi_-(\infty) = 0$ необходимо и достаточно выполнение равенства $C_- = 0$. Отметим, что все интегралы в формулах (8) существуют и дают однозначные аналитические функции в соответствующих областях. При этом у функций $\Phi_{\pm}(z)$ и у их производных существуют предельные значения на L , удовлетворяющие условию Гельдера. Теперь равенства (2) позволяют найти искомую функцию $\varphi(t)$ (при $k = 0$), а также заключить, что эта функция удовлетворяет предполагавшимся на нее требованиям. Таким образом, при сделанных предположениях на заданные функции справедлив следующий результат.

Теорема. *Для разрешимости уравнения (1) необходимо и достаточно выполнение условий (7). Если эти условия выполняются, то решение уравнения (1) содержит одну произвольную постоянную C_+ и имеет вид*

$$\varphi(t) = \left(\int_{z_+}^t \frac{F_+(\zeta)}{P_+(\zeta)Q_+(\zeta)} \exp \left(- \int_{z_+}^{\zeta} \frac{P'_+(\sigma)Q'_+(\sigma)d\sigma}{P_+(\sigma)Q_+(\sigma)} \right) d\zeta + C_+ \right) \exp \left(\int_{z_+}^t \frac{P'_+(\zeta)Q'_+(\zeta)d\zeta}{P_+(\zeta)Q_+(\zeta)} \right) - \\ - \left(\int_{\infty}^t \frac{F_-(\zeta)}{P_-(\zeta)Q_-(\zeta)} \exp \left(- \int_{\infty}^{\zeta} \frac{P'_-(\sigma)Q'_-(\sigma)d\sigma}{P_-(\sigma)Q_-(\sigma)} \right) d\zeta \right) \exp \left(\int_{\infty}^t \frac{P'_-(\zeta)Q'_-(\zeta)d\zeta}{P_-(\zeta)Q_-(\zeta)} \right).$$

Список литературы

1. Зверович Э. И., Шилин А. П. Решение интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными и гиперсингулярными интегралами специального вида // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. 2018. Т. 54, № 4. С. 404–407. doi: 10.29235/1561-2430-2018-54-4-404-407
2. Шилин А. П. Решение одного интегро-дифференциального уравнения второго порядка, заданного с помощью определителей // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : материалы XV Междунар. научн.-техн. конф. (г. Пенза, Россия, 1–4 декабря 2020 г.) / под ред. д-ра физ.-мат. наук, проф. И. В. Бойкова. Пенза : Изд-во ПГУ, 2020. С. 18–22.
3. Зверович Э. И. Обобщение формул Сохоцкого // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя: фізіка-матэматычных навук. 2012. № 2. С. 24–28.
4. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М. : Наука, 1977. 640 с.

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СПИНОВОГО ГОРЕНИЯ

*Анастасия Андреевна Гребенева¹,
Владимир Андреевич Лукьяненко²*

^{1,2} Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского,
Симферополь, Россия

¹ agrebeneva2001@gmail.com, ² art-inf@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается задача безгазового спинового горения для модели сингулярно возмущенного нелинейного параболического уравнения ван-дер-полевского типа в круговых областях (круг, кольцо, тонкое кольцо и окружность). Сравниваются соответствующие спектральные задачи, с помощью которых определяется действие псевдодифференциального оператора $(-\Delta)^\alpha$, $0 < \alpha < 1$. Исследуются структуры рождающихся после бифуркации Андронова – Хопфа решений.

Ключевые слова: нелинейное уравнение спинового горения, нестационарные эффекты, бифуркация решений, вращающиеся волны, метод центральных многообразий, метод Галеркина, преобразование Фурье

Финансирование: работа В. А. Лукьяненко поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2023-1799.

PHENOMENOLOGICAL MODEL OF SPIN COMBUSTION

Anastasia A. Grebeneva¹, Vladimir A. Lukianenko²

^{1,2} V. I. Vernadsky Crimean Federal University,
Simferopol, Russia

¹ agrebeneva2001@gmail.com, ² art-inf@yandex.ru

Abstract. The gasfree spin combustion problem is considered for the singularly perturbed nonlinear parabolic van der Pol equation in annular areas (circle, ring, thin ring and circumference). The corresponding spectral problems by which the action of a pseudo-differential operator $(-\Delta)^\alpha$, $0 < \alpha < 1$ is determined are compared. The structures of the solutions, which are born after the bifurcation of Adronov-Hopf, are studied.

Keywords: nonlinear equation of spin combustion, nonstationary effects, bifurcation of solutions, rotating waves, method of central variety, Galerkin's method, Fourier transformation

Financing: V. A. Lukianenko's work was financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, project № 075-02-2023-1799.

Введение

Изучение теории детонации, так называемого «быстрого горения», позволило открыть новые нестационарные эффекты: автоколебательные и спиновые режимы распространения зоны экзотермической реакции.

Математическая модель феноменологического уравнения спинового горения была предложена Я. Б. Зельдовичем совместно с А. П. Алдушиным и Б. А. Маломедом [1]:

$$\ddot{\xi} + \xi = 2\varepsilon \left[\dot{\xi} \left(1 - \frac{4}{3} \xi^2 \right) + \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \Delta \dot{\xi} + \frac{\beta\lambda}{2\pi} \sqrt{-\Delta} \dot{\xi} \right]. \quad (1)$$

Здесь $\xi = \xi(x, t)$ – функция, описывающая фронт распространения реакции горения; $0 < \varepsilon \ll 1$ – инкремент неустойчивости, $\lambda > 0$ – корреляционная длина теплопроводности связей между соседними участками фронта, $\beta > 0$ – коэффициент нелокальной связи участков фронта. Точка означает дифференцирование по времени, а Δ – одномерный лапласиан.

Ранее было предложено обобщение модели (1), в которой используется псевдодифференциальный оператор $(-\Delta)^\alpha$, $0 < \alpha < 1$. Исследованы модели, когда зона распространения реакции вся плоскость и тонкостенный цилиндр [2]. В работах [3]–[4] рассмотрен случай спинового горения в кольце. Задача для тонкого кольца $R < r < R + \delta$ при $\delta \rightarrow 0$ сводится к задаче на окружности, исследуемой с помощью метода Крылова-Боголюбова-Митропольского-Самойленко (КБМС) [5].

В качестве фазового пространства выбрано пространство $E = \{(u, \dot{u}) \mid u, \dot{u} \in L_2(\Omega)\}$, где $\Omega = \{(r, \theta) \mid 0 < r < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. H – гильбертово пространство измеримых на Ω функций со скалярным произведением

$$(f, g)_H = \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(r, \theta) \overline{g(r, \theta)} d\theta dr \quad \text{и} \quad \text{с} \quad \text{нормой}$$

$$\|f\|_H^2 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f(r, \theta)|^2 d\theta dr.$$

Модель спинового горения на круге

Автоколебательным режимам феноменологического уравнения спинового горения с краевыми условиями Неймана на круге $0 < r < 1$, $0 < \theta < 2\pi$ соответствует задача

$$\ddot{u} + u = 2\varepsilon \left[\dot{u} \left(1 - \frac{4}{3} \dot{u}^2 \right) - \frac{\lambda^2}{4\pi^2} (-\Delta) \dot{u} + \frac{\beta\lambda}{2\pi} (-\Delta)^\alpha \dot{u} \right], \quad 0 < \alpha < 1, \\ u(r, \theta + 2\pi, t) = u(r, \theta, t), \quad (2)$$

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0, \quad |u(0, \theta, t)| \quad \text{ограничена.}$$

Действие дробной степени лапласиана $(-\Delta)^\alpha = A^\alpha$ определено через собственные функции оператора $A = -\Delta$, $-\Delta \psi_{nm}(r, \theta) = \mu_{nm}^2 \psi_{nm}(r, \theta)$: $(-\Delta)^\alpha \psi_{nm}(r, \theta) = \mu_{nm}^{2\alpha} \psi_{nm}(r, \theta)$, μ_{nm} являются корнями трансцендентного уравнения $J'_n(\mu) = 0, n = 0, 1, 2, \dots$

Лемма 1. Собственные функции краевой задачи для уравнения Лапласа с условиями Неймана определяются через комбинации функций Бесселя $J_n(r)$:

$$J_{nm}(r, \theta) = \frac{\psi_{nm}(r, \theta)}{\|\psi_{nm}(r, \theta)\|}, \quad \|J_{nm}\|^2 = 1, \quad (3)$$

где $\psi_{nm}(r, \theta) = J_n(\mu_{nm}r) \begin{cases} \sin n\theta, n = 0, 1, 2, \dots, \\ \cos n\theta, m = 1, 2, \dots, \end{cases}$

$$\|\psi_{nm}(r, \theta)\|^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{n^2}{\mu_{nm}^2} \right) [J_n(\mu_{nm})]^2.$$

Собственными значениями задачи (2) являются

$$q_{nm}(\rho) = 1 - \rho^{-2} (\mu_{nm})^2 + \beta \rho^{-1} (\mu_{nm})^{2\alpha}, \quad (4)$$

где $\rho = \frac{2\pi}{\lambda}$ – бифуркационный параметр.

Характер устойчивости автоколебательных режимов уточнен анализом двух- и четырехмодовой аппроксимациями соответствующей (2) квазинормальной формы задачи

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \Delta v + \frac{\beta \lambda}{2\pi} (-\Delta)^\alpha v + v - |v|^2 v, \quad \frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0. \quad (5)$$

Спектр ее линеаризованной задачи представим в виде s

$$\{0, -2, q_{1m} - 1, q_{1m} - 3, q_{2m} - 1, q_{2m} - 3, \dots\}.$$

Окружность $|v|^2 = 1$ (стационарное решение (5)) теряет устойчивость, когда параметр ρ проходит бифуркационное значение $\rho_{11} = \beta^{-1} \mu_{11}^{2(1-\alpha)}$. При $q_{11}(\rho_{11}) = 1$ имеет место суперкритическая бифуркация типа «вилка».

Теорема 1. При малых $\rho - \rho_{11}$ приближенными периодическими по t орбитально экспоненциально устойчивыми решениями задачи (5) являются бегущие волны вида

$$u^\pm(t, r, \theta) = \sqrt{\frac{q_{01}}{\gamma_0} - 2 \frac{\gamma_2}{\gamma_0} \frac{q_{11} - 1}{3\gamma_1 - 2\gamma_2}} \cos t J_{01}(r) \pm 2 \sqrt{\frac{q_{11} - 1}{3\gamma_1 - 2\gamma_2}} \sin t \cos \theta J_{11}(r) + \dots \quad (6)$$

Коэффициенты γ_j равны

$$\gamma_0 = \int_0^1 \frac{J_0^4(\mu_{01}r)}{\|J_0(\mu_{01})\|^4} r dr, \quad \gamma_1 = \int_0^1 \frac{J_1^4(\mu_{11}r)}{\|J_1(\mu_{11})\|^4} r dr, \quad \gamma_2 = \int_0^1 \frac{J_0^2(\mu_{01}r)J_1^2(\mu_{11}r)}{\|J_0(\mu_{01})\|^2 \cdot \|J_1(\mu_{11})\|^2} r dr.$$

Модель спиновое горения в кольце

Используя метод Крылова-Боголюбова-Митропольского-Самойленко, построена асимптотика рождающихся решений типа вращающихся волн, когда область распространения фронта кольцо $r_1 < r < r_2$ [3]–[4] (цилиндрическая толстостенная труба), исследована их структура и устойчивость:

$$\begin{aligned} \ddot{u} + u &= 2\varepsilon \left[\dot{u} \left(1 - \frac{4}{3} \dot{u}^2 \right) - \frac{\lambda^2}{4\pi^2} (-\Delta) \dot{u} + \frac{\beta\lambda}{2\pi} (-\Delta)^\alpha \dot{u} \right], \quad 0 < \alpha < 1, \\ u(r, \varphi + 2\pi, t) &= u(r, \varphi, t), \\ \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} \Big|_{r=r_1, r_2} &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=r_1, r_2} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

По аналогии с выкладками для круга получена

Лемма 2. Нормированные собственные функции задачи (7)

$\psi_{nm}(r, \varphi) = J_{nm}(r) \frac{e^{in\varphi}}{\sqrt{2}}$ определяются через комбинации функций Бесселя J_n и функций Неймана Y_n :

$$J_{nm}(r) = \frac{R_{nm}(r)}{\|R_{nm}(r)\|},$$

где $R_{nm}(r) = J_n\left(\frac{\mu_{nm}}{r_1}r\right)Y'_n\left(\frac{\mu_{nm}}{r_1}\right) - J'_n\left(\frac{\mu_{nm}}{r_1}\right)Y_n\left(\frac{\mu_{nm}}{r_1}r\right),$

$$\|R_{nm}(r)\|^2 = \frac{2}{\pi^2 \mu_{nm}^2} \left[\frac{\pi^2 r_1^2}{4} (\mu_{nm}^2 \chi^2 - n^2) (R_{nm}(\mu_{nm} \chi))^2 - (\mu_{nm}^2 - n^2) \right],$$

μ_{nm} являются корнями трансцендентного уравнения

$$J'_n(\mu)Y'_n(\chi\mu) - Y'_n(\mu)J'_n(\chi\mu) = 0, \quad \chi = \frac{r_2}{r_1}, \quad \lambda_{nm} = \left(\frac{\mu_{nm}}{r_1} \right)^2.$$

Им соответствуют собственные значения

$$q_{nm}(\rho) = 1 - \rho^{-2} \left(\frac{\mu_{nm}}{r_1} \right)^2 + \beta \rho^{-1} \left(\frac{\mu_{nm}}{r_1} \right)^{2\alpha},$$

где $\rho = \frac{2\pi}{\lambda}$ – бифуркационный параметр.

Теорема 2. Задача безгазового спиновое горения в кольце (7) имеет приближенные решения

$$(u_1^s)^\pm = \sum_{m=1}^3 z_{1m}^s J_{1m}(r) \cos(t \mp \theta), \quad s=1,2, \quad (8)$$

где $z_{1m}^s = z_{1m}^s(\rho)$, $m=1,2,3$.

На основании проведенного бифуркационного анализа соответствующих разложению (8) гамильтоновых систем имеет место

Теорема 3. Спиновые волны $(u_n^s)^+(\rho)$, $n=2,3,\dots$, $s=1,2,\dots$ рождаются и остаются неустойчивыми. Экспоненциально орбитально устойчивыми будут только первые спиновые волны.

Результаты относительно вращающихся волн начально-краевой задачи в кольце справедливы и для соответствующих стационарных решений ее квазинормальной формы.

Модель спиновое горения на окружности

Из асимптотики для тонкого кольца $R < r < R + \delta$ при $\delta \rightarrow 0$ (см. [2]) потребуем, чтобы решение почти совсем не менялось в радиальном направлении (т.е. $\dot{u}_r = 0$) и устремим $\delta \rightarrow 0$. Получим одномерную модель задачи (7) с оператором $\Delta \dot{u} = \frac{1}{R^2} \dot{u}_{\varphi\varphi}$.

Периодическим решениям на окружности соответствуют спиновые режимы горения тонкостенного цилиндра ($\varphi = \theta R$). Результаты для окружности согласуются с полученными для тонкого кольца. С помощью дискретного преобразования Фурье W , получена

Теорема 4. Начально-краевая задача

$$\ddot{u} + u = 2\varepsilon \left[\dot{u} \left(1 - \frac{4}{3} \dot{u}^2 \right) + \frac{\lambda^2}{4\pi^2 R^2} \Delta \dot{u} + \frac{\beta \lambda}{2\pi R^{2\alpha}} (-\Delta)^\alpha \dot{u} \right], \quad 0 < \alpha < 1, \\ u(\theta + 2\pi, t) = u(\theta, t), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ u(\theta, 0) = u_0(\theta), \quad \dot{u}(\theta, 0) = u_1(\theta). \quad (9)$$

представима в виде

$$u(\theta, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (K_1(\theta - s)u_0(s) + K_2(\theta - s)u_1(s))ds - 2\mu\varepsilon \int_0^t \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_3(\theta - s, t - \tau) \dot{u}^3(s, \tau) ds d\tau, \quad (10)$$

$$\text{где } (k_1)_n(t) = \frac{(\omega_2)_n e^{(\omega_2)_n t} + (\omega_1)_n e^{(\omega_1)_n t}}{(\omega_2)_n - (\omega_1)_n}, \quad (k_2)_n(t) = \frac{e^{(\omega_2)_n t} + e^{(\omega_1)_n t}}{(\omega_2)_n - (\omega_1)_n}, \\ (k_3)_n(t) = \frac{\sin \sqrt{1 - \varepsilon^2 q_n^2} t}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 q_n^2}} e^{\varepsilon q_n t}, \quad K_j(\theta, t) = W(k_j)_n(\theta, t), \quad j=1,2,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_3(\theta - s, t - \tau) \dot{u}^3(s, \tau) ds d\tau = W(k_3)_n g_n, \quad \varepsilon^2 q_n^2 - 1 < 0. \text{ Здесь } (\omega_{1,2})_n$$

находятся из характеристического уравнения (9) в образах Фурье.

Асимптотический анализ в сочетании с методом Галеркина позволяет найти пару периодических устойчивых решений вида (при $\alpha = \frac{1}{2}$)

$$u_1^{\pm} = \sqrt{3 - 2q_1} \cos t \pm 2\sqrt{q_1 - 1} \sin t \cos \theta + O(\varepsilon),$$

которые рождаются из нулевого решения $u_0 = \cos t + O(\varepsilon)$ при прохождении q_1 через критическое значение равное единице.

Заключение

Для сравнения рассмотрены модели спинового горения в круговых областях. Исследованы их спектральные задачи, квазинормальные формы и структура решений. С помощью метода Галеркина в сочетании с методом центральных многообразий и методом КБМС уточнен характер потери устойчивости.

Список литературы

1. Зельдович Я. Б., Маломед Б. А. Сложные волновые режимы в распределенных динамических системах (обзор) // Известия высших учебных заведений. 1982. Т. XXV, № 6. С. 591–618.
2. Хазова Ю. А., Гребенева А. А. Анализ устойчивости и формы приближенных периодических решений уравнения спинового горения // Таврический вестник информатики и математики. 2022. № 1 (54). С. 75–67. EDN INYNQT.
3. Lukianenko V. A., Grebeneva A. A. Solvability of the phenomenological spin combustion equation // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения» (OTDE-Conference) : тезисы докладов XVII междунар. науч. конф. Владикавказ : MOM и ВНЦ РАН, 2023. С. 182–183.
4. Grebeneva A. A., Lukianenko V. A. Bifurcation of Solutions of the Phenomenological Equation of Spin Combustion // International Conference on «Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications» (PHENMA 2023): Abstracts and Schedule (Surabaya, Indonesia, October 3–8, 2023) / ed. by I. A. Parinov, E. P. Putri, S.-H. Chang. Taganrog : Southern Federal University Press, 2023. P. 130.
5. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М. : Наука, 1974. 504 с.

К ВОПРОСУ О ГРАНИЦАХ ПРИМЕНИМОСТИ УРАВНЕНИЙ ПОКЛИНГТОНА И ГАЛЛЕНА ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВИБРАТОРОВ

Илья Владимирович Бойков¹, Павел Владимирович Айкашев²

^{1,2} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹ i.v.boykov@gmail.com, ² aikashev.pavel@mail.ru

Аннотация. Интегро-дифференциальное уравнение Поклингтона и интегральное уравнение Галлена в настоящее время являются одним из основных математических инструментов, используемых при моделировании электрических вибраторов с различной топологией. При выводе этих уравнений было сделано несколько допущений физического характера. В частности, предполагалось, что значения тока на концах вибратора равны нулю. Определены соотношения «величина зазора/длина вибратора», при которых допустимо это предположение.

Ключевые слова: уравнение Поклингтона, уравнение Галлена, электрический вибратор, распределение тока

Благодарности: авторы выражают искреннюю признательность д.ф.-м.н., профессору Д. С. Ключеву, д.ф.-м.н., профессору Д. П. Табакову и участникам руководимого ими семинара за полезные дискуссии по теории антенн.

ON THE QUESTION OF THE LIMITS OF APPLICABILITY OF THE EQUATIONS POCKLINGTON AND GALLEN IN MODELING ELECTRIC VIBRATORS

Ilya V. Boykov¹, Pavel V. Aikashev²

^{1,2} Penza State University, Penza, Russia

¹ i.v.boykov@gmail.com, ² aikashev.pavel@mail.ru

Abstract. The Pocklington integro-differential equation and the Gallen integral equation are currently one of the main mathematical tools used in modeling electric vibrators with different topologies. Several physical assumptions were made in the derivation of these equations. In particular, it was assumed that the current values at the ends of the vibrator were zero. In this note, the ratio "gap size / length of the vibrator" is defined, under which this assumption is acceptable.

Keywords: Pocklington equation, Gallen equation, electric vibrators, current distribution

Acknowledgements: the authors express their sincere gratitude to doctor of physical and mathematical sciences, professor D. S. Klyuev, doctor of physical and mathematical sciences, professor D. P. Tabakov and the participants of the seminar led by them for useful discussions on antenna theory.

Введение

В настоящее время моделирование электрических вибраторов осуществляется, как правило, интегральными и интегро-дифференциальными уравнениями, описывающими распределение тока на вибраторе. Это интегро-дифференциальные уравнения Поклингтона и Харрисона, интегральное уравнение Галлена [8] и сингулярные интегральные уравнения [7].

В данной работе исследуются интегральные уравнения, моделирующие прямолинейный цилиндрический вибратор. Рассеяние стороннего гармонического поля на идеальном проводнике, магнитная проницаемость которого равна магнитной проницаемости вакуума, а электрические токи направлены параллельно оси z , описывается [8], интегро-дифференциальным уравнением Поклингтона

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-l}^l I_z(z') \left[\frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right] \frac{e^{-ikR_a(z-z')}}{R_a(z-z')} dz' = i\omega\epsilon E_z(z), \quad (1)$$

где $2l$ – длина вибратора; k – волновое число в среде, окружающей вибратор, ϵ – диэлектрическая проницаемость среды; I_z – искомое распределение тока; $E_z(z)$ – касательная составляющая вектора напряженности электрического поля $E(z)$, $E(z) = E_m(z) \cos(\omega z + \varphi)$, φ – начальная фаза колебаний, $R_a(z) = [a^2 + z^2]^{1/2}$.

Так как ядро уравнения (1) имеет счетное множество производных, то операторы интегрирования и дифференцирования перестановочны и уравнение (1) можно записать в виде уравнения

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right] \frac{1}{4\pi} \int_{-l}^l I_z(z') \frac{e^{-ikR_a(z-z')}}{R_a(z-z')} dz' = i\omega\epsilon E_z(z), \quad (2)$$

которое можно использовать при переходе от уравнения Поклингтона к уравнению Галлена.

При выводе уравнения (1) и при переходе от уравнения Поклингтона к уравнению Галлена сделаны следующие предположения [8], [6]:

1) поверхностные электрические токи J_z^e вместе с магнитными эквивалентными токами J_z^m заменяются на оси вибратора бесконечно тонкой нитью продольного электрического поля $I_z(z) = 2\pi a J_z^e(z)$. Этот ток считается непрерывной функцией в области возбуждающего зазора и удовлетворяет граничным условиям

$$I_z(l) = 0, I_z(-l) = 0, \quad (3)$$

т.е. игнорируются торцевые токи;

2) касательная составляющая вектора напряженности электрического поля $E_z(z)$, создаваемая нитью тока $I_z(z)$ на боковой поверхности цилиндрического вибратора с радиусом a , обращается в нуль всюду, кроме возбуждающего зазора шириной h ;

3) касательная составляющей $E_z(z)$ в области зазора предполагается равной некоторой функции $E^B(z)$, осуществляющей возбуждение вибратора.

При этих предположениях полагается, что искомый ток $I_z(z)$ создает электрическое поле $E(z)$, где

$$E_z(z) = \begin{cases} 0, & |z| > \frac{h}{2} \\ E_z^B(z), & |z| \leq \frac{h}{2}. \end{cases}$$

Кроме того, предполагается, что неизвестное распределение токов $I_z(z)$ создает на боковой поверхности вибратора векторный потенциал A , все составляющие которого, кроме продольной, равны 0. Продольная составляющая A_z равна нулю всюду, кроме зазора.

Касательная составляющая вектора напряженности электрического тока $E_z(z)$ связана с векторным потенциалом формулой [8]:

$$E_z(z) = \frac{1}{i\omega\epsilon} \left(k^2 A_z + \frac{d^2 A_z}{dz^2} \right). \quad (4)$$

Подставляя в (4) значение E_z , приходим к дифференциальному уравнению

$$k^2 A_z + \frac{d^2 A_z}{dz^2} = \begin{cases} 0, & |z| > \frac{h}{2} \\ i\omega\epsilon E_z^B(z), & |z| \leq \frac{h}{2} \end{cases} \quad (5)$$

Учитывая связь между векторным потенциалом и током возбуждения

$$A_z(z) = \frac{1}{4\pi} \int_{-l_2}^{l_1} I_z(z') \frac{e^{-ikR_a(z')}}{R_a(z')} dz', \quad R_z(z) = \sqrt{(z-z')^2 + a^2}$$

приходим к уравнению Поклингтона для электрического вибратора

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right] \frac{1}{4\pi} \int_{-l}^l I_z(z') \frac{e^{-ikR_a(z-z')}}{R_a(z-z')} dz' = \begin{cases} 0, & |z| > \frac{h}{2} \\ i\omega\epsilon E_z^B(z), & |z| \leq \frac{h}{2} \end{cases} (z), \quad (6)$$

Уравнение (5) имеет решение [6]

$$A_z(z) = \frac{C_1}{4\pi} e^{ikz} + \frac{C_2}{4\pi} e^{-ikz} +$$

$$+ \begin{cases} -\frac{i\omega\epsilon}{2ik} e^{-ikz} \int_{-\frac{h}{2}}^z h E_{z'}^B(z') e^{ikz} dz', & z \geq \frac{h}{2}; \\ -\frac{i\omega\epsilon}{2ik} e^{ikz} \int_z^{\frac{h}{2}} E_{z'}^B(z') e^{-ikz} dz', & z \leq -\frac{h}{2}; \\ -\frac{i\omega\epsilon}{2ik} e^{-ikz} \int_{-h/2}^z E_{z'}^B(z') e^{ikz} dz' - \frac{i\omega\epsilon}{2ik} e^{ikz} \int_z^{h/2} E_{z'}^B(z') e^{-ikz} dz', & \frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \end{cases}$$

Учитывая связь между векторным потенциалом и током возбуждения приходим к уравнению Галлена

$$\int_{-l}^l I_z(z') \frac{e^{-ikR_a(z')}}{R_a(z')} dz' = \frac{C_1}{4\pi} e^{ikz} + \frac{C_2}{4\pi} e^{-ikz} +$$

$$+ \begin{cases} -\frac{i\omega\epsilon}{2ik} e^{-ikz} \int_{-\frac{h}{2}}^z h E_{z'}^B(z') e^{ikz} dz', & z \geq \frac{h}{2}; \\ -\frac{i\omega\epsilon}{2ik} e^{ikz} \int_z^{\frac{h}{2}} E_{z'}^B(z') e^{-ikz} dz', & z \leq -\frac{h}{2}; \\ -\frac{i\omega\epsilon}{2ik} e^{-ikz} \int_{-h/2}^z E_{z'}^B(z') e^{ikz} dz' - \frac{i\omega\epsilon}{2ik} e^{ikz} \int_z^{h/2} E_{z'}^B(z') e^{-ikz} dz', & \frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \end{cases} \quad (7)$$

Это уравнение при ряде существенных ограничений приводится [6], [8] к уравнению

$$\int_{-l}^l I_z(z') K(z-z') dz' = C \cos kz - \frac{2\pi i V}{W} \sin k|z|, \quad -l \leq z \leq l, \quad (8)$$

где $K(z-z') = \frac{e^{-ik\sqrt{(z-z')^2 + a^2}}}{\sqrt{(z-z')^2 + a^2}}$; V – ЭДС генератора возбуждения;

$W = k / (\omega\epsilon)$; C – некоторая постоянная.

Отметим, что одним из ограничений является предположение о том, что $E_z^B(z)$ является постоянной в зазоре. Вторым – предположение, что ток на концах вибратора равен нулю.

Отметим, что наряду с уравнением Галлена вида (8), которое наиболее часто встречается в литературе, более точное моделирование осуществляется уравнением [9]

$$\int_{-l}^l K(z-z') I_z(z') dz' = \frac{i}{2l_0} V \sin k|z| + C \cos kz,$$

$$\text{где } K(z) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-ik\sqrt{z^2+4a^2\sin^2\frac{\theta}{2}}}}{\sqrt{z^2+4a^2\sin^2\frac{\theta}{2}}} d\theta, \quad l_0 = 376.73\Omega, \quad V - \text{приложенное}$$

напряжение, C – константа, определяется из условия $I_z(-l) = I_z(l) = 0$.

Несмотря на то, что уравнения Поклингтона и Галлена являются классическими и широко используются при моделировании электрических вибраторов, представляет интерес исследование условий, при которых математические модели, описываемые этими уравнениями, адекватны физическим процессам.

В частности, представляет интерес исследование условий, при которых в модели выполняется предположение о том, что ток на торцах вибратора равен нулю. Т.е. нахождение условий, при которых решения уравнений Поклингтона и Галлена при $z = -l$ и при $z = l$ равны нулю.

Цель этого исследования – найти диапазон значений отношения параметров h/l , при которых предположение о том, что ток на концах вибратора равен нулю, выполняется при моделировании вибратора уравнением Поклингтона (Галлена). Показано, что, при выполнении условия $h/l \leq 0.1$, ток на концах вибратора равен нулю (с точностью до вычислительной погрешности экспериментов) и, следовательно, при этих значениях h, l уравнения Поклингтона и Галлена моделируют электрический вибратор.

Исследование заключается в следующем. Взяв за исходное уравнение (7), стандартными методами теории дифференциальных уравнений строим интегральное уравнение, обобщающее классическое уравнение Галлена. Для приближенного решения уравнения Поклингтона и обобщенного уравнения Галлена в работе построено и обосновано несколько вычислительных схем и проведены вычислительные эксперименты. При этом обобщаются вычислительные схемы, построенные в [2] и моделируются вибраторы при вариации параметра "а" в пределах от $a = 0.5$ до $a = 10^{-16}$. Модельные примеры показали, что изменение параметра a в столь широком диапазоне не влияет на качественную картину распределения электромагнитных волн.

При проведении численных экспериментов был определен ток на концах вибратора в предположении, что вибратор возбуждается электрическим полем, касательная составляющая которого равна нулю всюду, кроме зазора, а в зазоре является константой, или дельта-образной функцией, или периодической функцией. Оказалось, что при

этих предположениях ток на концах вибратора равен нулю с точностью до вычислительной погрешности.

Так как качественная картина распространения электромагнитных волн не меняется при изменении параметра a в пределах от $a = 0.5$ до $a = 10^{-16}$, то представляет интерес рассмотрение предельного случая $a = 0$, который не имеет физического смысла, но исследование которого представляет интерес с точки зрения вычислительной математики – сохраняется ли качественная картина?

Ранее предельный случай был исследован в работе [5], причем там было подчеркнуто, что он рассматривается как математическое обобщение, а не как следствие из уравнений Максвелла. В работе [5] введено определение гиперсингулярных интегралов вида

$$\int_a^b \frac{\varphi(\tau)}{|\tau - t|} d\tau, t \in (a, b)$$

и построены и обоснованы две квадратурные формулы для вычисления подобных интегралов.

В данной работе решено более точными методами, нежели в [5], уравнение (8) при $a = 0$. Полученное решение принципиально отличается от решений, отвечающих значениям параметра a , изменяющимся в пределах от $a = 0.5$ до $a = 10^{-16}$. Таким образом, предельный случай $a = 0$ даже формально не применим к исследованию электрических вибраторов.

Приближенным методам решения интегральных уравнений Поклингтона, Харрингтона, Галлена посвящено большое число работ, из которых отметим монографии [10], [8], в которых имеется подробная библиография. В основном, для решения уравнения Поклингтона, Харрингтона и Галлена применяются проекционные методы, в частности, метод моментов, но при этом следует отметить, что в работе [11] для расчета проволочных антенн использован метод конечных элементов высокого порядка. Отметим, что в работах [5], [2] предложены итерационные методы решения уравнений

$$\int_{-l_2}^{l_1} h(z - z') I_z(z') dz' = f(z),$$

$$\text{где } h(z) = \frac{\partial^2 G(z)}{\partial z^2} + k^2 G(z), \quad G(z) = \frac{\exp\{-ik\sqrt{a^2 + z^2}\}}{\sqrt{a^2 + z^2}}.$$

В работе [5] метод построен в предположении, что $I_z(-l) = I_z(l) = 0$.

В работе [2] непрерывный метод решения нелинейных операторных уравнений [1] применен для решения уравнений Поклингтона и Галлена.

Как отмечено выше, классическое уравнение Поклингтона

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-l}^l I_z(z') \left[\frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right] \frac{e^{-ikR_a(z-z')}}{R_a(z-z')} dz' = i\omega\epsilon E_z(z),$$

где $R(z-z') = \sqrt{a^2 + (z-z')^2}$, пользуясь коммутацией операторов дифференцирования и интегрирования для бесконечно дифференцируемой функции $\frac{e^{-ikR_a(z-z')}}{R_a(z-z')}$ записывается в виде дифференциального уравнения

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right] \frac{1}{4\pi} \int_{-l}^l I_z(z') \frac{e^{-ikR_a(z-z')}}{R_a(z-z')} dz' = i\omega\epsilon E_z(z), \quad (9)$$

Присоединяя к уравнению (9) граничные условия $U(-l) = a_1, U(l) = a_2$, с подлежащими определению константами a_1 и a_2 , приходим к граничной задаче

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right) U(z) = f(z), \quad (10)$$

$$U(-l) = a_1, U(l) = a_2, \quad (11)$$

где $U(z) = \frac{1}{4\pi} \int_{-l}^l I_z(z') \frac{e^{-i\gamma R_a(z-z')}}{4\pi R_a(z-z')} dz'$, $f(z) = i\omega\epsilon E_z(z)$.

Решение граничной задачи (10), (11), в предположении что $\cos(\gamma l) \neq 0$, $\sin(\gamma l) \neq 0$, приводит к следующему интегральному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{-l}^l I_z(z') \frac{e^{-ikR_a(z-z')}}{R_a(z-z')} dz' = F(z) + \frac{a_1 + a_2 - F(-l) - F(l)}{2\cos(kl)} \cos(kz) + \\ + \frac{a_2 - a_1 - F(l) + F(-l)}{2\sin(\gamma l)} \sin(\gamma z), \end{aligned} \quad (12)$$

в котором неизвестными является функция тока I_z и константы a_1 и a_2 .

Для решения интегрального уравнения (12) ниже построены и обоснованы две вычислительные схемы.

Интегральное уравнение (12) рассматривается без предположения, что ток на концах равен 0, и определяется наличие или отсутствие тока на концах вибратора.

3. Приближенное решение уравнения Поклингтона

В этом разделе построены и обоснованы приближенные методы решения уравнения Поклингтона (6).

Обозначим правую часть в уравнении (6) через $f(z)$ и рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + k^2\right) \frac{1}{4\pi} \int_{-l}^l I_z(z') \frac{e^{-ikR_a(z-z')}}{4\pi R_a(z-z')} dz' = f(z). \quad (13)$$

Так как функция $h(z, z') = \frac{e^{-ikR_a(z-z')}}{4\pi R_a(z-z')}$ при $a > 0$ имеет счетное число производных по z и z' , то операторы интегрирования и дифференцирования в уравнении (13) коммутируются и уравнение (13) можно записать в виде

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-l}^l \left[\left[\frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right] h(z, z') \right] I_z(z') dz' = f(z). \quad (14)$$

Проделав элементарные преобразования, приходим к уравнению

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-l}^l g(z, z') I_z(z') dz' = f(z), \quad (15)$$

где

$$g(z, z') = h(z, z') \left(\left[k^2 + \frac{(z-z')^2}{(a^2 + (z-z')^2)^{3/2}} - \frac{1}{a^2 + (z-z')^2} + \frac{3(z-z')^2}{(a^2 + (z-z')^2)^2} - k^2 \frac{(z-z')^2}{a^2 + (z-z')^2} \right] + i \left[\frac{3k^2(z-z')^2}{a^2 + (z-z')^{3/2}} - \frac{k}{(a^2 + (z-z')^2)^{1/2}} \right] \right).$$

Приближенное решение уравнения (15) будем искать в виде кусочно-постоянной функции

$$I_{z,N}(z') = \sum_{k=0}^{2N-1} \alpha_k \psi_k(z'),$$

где

$$\psi_k(z') = \begin{cases} 1, & z' \in \Delta_k, \\ 0, & z' \in [-l, l] \setminus \Delta_k, \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, 2N-1,$$

$$\Delta_k = [x_k, x_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, 2N-2,$$

$$\Delta_{2N-1} = [x_{2N-1}, x_{2N}], \quad x_k = -l + \frac{kl}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, 2N-1.$$

Введем узлы коллокации $x'_k = x_k + \frac{l}{2N}, k = 0, 1, \dots, 2N-1$.

Подставляя выражение $I_{z,N}(z')$ для искомого тока в уравнение (15), вычисляя интегралы по формуле левых прямоугольников с узлами $x_k, k = 0, 1, \dots, 2N-1$, и используя технологию метода коллокации по узлам $x'_k, k = 0, 1, \dots, 2N-1$, приходим к системе уравнений

$$K\alpha = \frac{l}{4\pi} \frac{l}{N} \sum_{k=0}^{2N-1} \alpha_k g(x'_j, x_k) = f(x'_j), j = 0, 1, \dots, 2N-1, \quad (16)$$

$$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2N-1}).$$

Замечание. При построении вычислительной схемы мы ограничились представлением искомого решения кусочно-постоянной функцией. Точность аппроксимации непрерывной функции $c(x), x \in [a, b]$ кусочно-постоянной функцией, определенной на N сегментах равной длины, равна $w\left(c, \frac{|b-a|}{2N}\right)$, где $w(c, \delta)$ – модуль непрерывности функции $c(x)$. Так как в уравнениях, моделирующих вибраторы, правые части как правило являются кусочно-непрерывными функциями, то при аппроксимации искомой функции $I(z')$ её приближением $I_{z,N}(z')$ достаточно ограничиться точностью $O(N^{-1})$

Разрешимость уравнения (16) будем исследовать в пространстве R^{2N} $2N$ -мерных векторов. Предположим, что среди всевозможных норм, определенных на пространстве R^{2N} существует (возможно не единственная) норма такая, что ассоциированная с ней логарифмическая норма отрицательна. Обозначим соответствующее банахово пространство через X . Согласно теореме Лозинского [12] в этом пространстве оператор K непрерывно обратим и система уравнений (16) однозначна разрешима. Обозначим через $I_{z,N}^*, (I_{z,N}^* = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2N-1}))$ решение системы уравнений (16).

Оценим, пользуясь методом предложенным в [4], точность полученного решения.

Пусть уравнение (13) имеет решение $I_z^*(z')$. Очевидно, что функция $I_z^*(z')$ будет также решением уравнения (15) и, следовательно,

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-l}^l g(x'_j, z') I_z^*(z') dz' = f(x'_j), j = 0, 1, \dots, 2N-1. \quad (17)$$

Представим систему (17) в следующем виде

$$\frac{1}{4\pi} \frac{l}{N} \sum_{k=0}^{2N-1} g(x'_j, x_k) I_z^*(x_k) = f(x'_j) + \frac{1}{4\pi} \frac{l}{N} \sum_{k=0}^{2N-1} g(x'_j, x_k) I_z^*(x_k) - \frac{1}{4\pi} \int_{-l}^l g(x'_j, z') I_z^*(z') dz'. \quad (18)$$

Вычитая из (16) равенство (18), имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \frac{l}{N} \sum_{k=0}^{2N-1} g(x'_j, x_k) (\alpha_k - I_z^*(x_k)) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-l}^l g(x'_j, z') I_z^*(z') dz' - \\ - \frac{1}{4\pi} \frac{l}{N} \sum_{k=0}^{2N-1} g(x'_j, x_k) I_z^*(x_k) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{2N-1} \int_{\Delta_k} (g(x'_j, z') I_z^*(z') - \bar{g}(x'_j, x_k) \bar{I}_z^*(x_k)) dz'. \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{I}_z^*(z) &= \begin{cases} I_z^*(x_k), & z \in \Delta_k \\ 0, & z \in [-l, l] \setminus \Delta_k \end{cases}, \quad k = 0, 1, \dots, 2N-1, \\ \bar{g}(x'_j, z) &= \begin{cases} g(x'_j, x_k), & z \in \Delta_k \\ 0, & z \in [-l, l] \setminus \Delta_k \end{cases}, \quad k = 0, 1, \dots, 2N-1. \end{aligned}$$

Так как логарифмическая норма матрицы в левой части системы (19) предполагается отрицательной в пространстве X , то, учитывая изометрию конечномерных пространств, имеем

$$\begin{aligned} \|\alpha - \bar{I}^*\|_{R^{2N}} &\leq \max_{1 \leq j \leq 2N} \left| \frac{C}{4\pi} \sum_{k=0}^{2N-1} \int_{\Delta_k} (g(x'_j, z') I_z^*(z') - \bar{g}(x'_j, x_k) \bar{I}_z^*(x_k)) dz' \right| \leq \\ &\leq C \left\| \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{2N-1} \int_{\Delta_k} ((g(x'_j, z') - \bar{g}(x'_j, z')) I_z^*(z')) dz' \right\|_{R^{2N}} + \\ &+ C \left\| \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{2N-1} \int_{\Delta_k} (g(x'_j, z') (I_z^*(z') - \bar{I}_z^*(z'))) dz' \right\|_{R^{2N}} = C\delta_1 + C\delta_2. \end{aligned}$$

Здесь ниже через C обозначены константы, независимые от N .

Оценка второй суммы зависит от гладкости функции тока.

Полагая, что $I_z^*(z') \in H_\alpha(M)$, $0 < \alpha \leq 1$, имеем

$$\delta_2 \leq CN^{-\alpha} \left\| \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{2N-1} \int_{\Delta_k} g(x'_j, z') dz' \right\| \leq CN^{-\alpha} \left\| \frac{1}{4\pi} \int_{-l}^l g(x'_j, z') dz' \right\| \leq CN^{-\alpha}.$$

Для оценки первой суммы заметим, что функция $g(z, z')$ принадлежит классу функций Липшица с константой C/a^3 .

$$\text{Тогда } \delta_2 \leq \frac{C}{a^3 N} \text{ и } \alpha - \bar{I}^* \leq \frac{C}{a^3 N}.$$

Следовательно, при достаточно больших N , предложенный проекционный метод сходится.

Для решения уравнения Поклингтона была построена еще одна вычислительная схема, в которой, в отличие от описанной выше, интегралы от ядер интегралов не аппроксимировались квадратурными формулами прямоугольников, а вычислялись с большей точностью. Так как применение этой схемы для решения уравнения Поклингтона не дает новых качественных результатов, а представляет лишь вычислительный интерес, то ее подробное описание опускаем.

Были проведены вычислительные эксперименты, целью которых было определить при каких относительных значениях величины зазора к длине вибратора уравнение Поклингтона достаточно точно моделирует физические процессы в вибраторе. При выводе уравнения Поклингтона было сделано предположение о том, что ток на концах вибратора равен нулю. Приводимые ниже результаты вычислительных экспериментов подтверждают соответствие уравнения Поклингтона физическим процессам в вибраторе при выполнении условия $d/l \leq 0.1$.

3. Приближенное решение уравнения Галлена

Вначале остановимся на вопросе о выводе уравнения Галлена.

Во введение приведено уравнение Галлена, полученное при ряде упрощений, допущенных при его выводе. Одним из них является предположение о том, что ток на концах вибратора равен нулю. Это условие не следует из самого уравнения. Оно имеет место только, при достаточно специфичных правых частях. Поэтому представляет интерес подробный анализ уравнения Галлена без дополнительных а-приорных условий о равенстве решения нулю при $z = \pm l$.

При выводе уравнения Галлена исходим из уравнения Поклингтона

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right) \frac{1}{4\pi} \int_{-l}^l I_z(z') \frac{e^{-ikR_a(z-z')}}{4\pi R_a(z-z')} dz' = f(z), z \in [-l, l]. \quad (20)$$

Замечание. Возможна постановка задачи в которой $z \in (-\infty, \infty)$.

Введем функцию

$$U(z) = \frac{1}{4\pi} \int_{-l}^l I_z(z') \frac{e^{-ikR_a(z-z')}}{4\pi R_a(z-z')} dz'.$$

Запишем уравнение (20) в виде

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right) U(z) = f(z). \quad (21)$$

Поставим в соответствие уравнению (21) граничное условие

$$U(-l) = a_1, U(l) = a_2, \quad (22)$$

со значениями a_1, a_2 , подлежащими определению.

Уравнение (21) имеет решение

$$U(z) = F(z) + A \cos(kz) + B \sin(kz),$$

где $F(z)$ – частное решение.

Из граничных условий (22) имеем

$$a_1 = F(-l) + A \cos(kl) - B \sin(kl), \quad (23)$$

$$a_2 = F(l) + A \cos(kl) + B \sin(kl).$$

Очевидно

$$A = \frac{(a_1 + a_2 - F(-l) - F(l))}{2 \cos(kl)}, \quad B = \frac{(a_2 - a_1 - F(l) + F(-l))}{2 \sin(kl)}. \quad (24)$$

Формулы (24) справедливы в предположении, что $\cos(kl) \neq 0$, $\sin(kl) \neq 0$.

Поэтому необходимо рассмотреть отдельно следующие случаи:

$$1) \quad kl \neq j \frac{\pi}{2}, j = \dots, -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n, \dots;$$

$$2) \quad kl = j\pi, j = \dots, -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n, \dots;$$

$$3) \quad kl = \frac{\pi}{2} + j\pi, j = \dots, -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n, \dots$$

Рассмотрим первый случай.

Задача сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{-l}^l I_z(z') \frac{e^{-ikR_a(z-z')}}{4\pi R_a(z-z')} dz' - \frac{a_1 + a_2 - F(-l) - F(l)}{2 \cos(kl)} \cos(kz) - \\ - \frac{(a_2 - a_1 - F(l) + F(-l))}{2 \sin(kl)} \sin kz = F(z), \end{aligned}$$

в котором неизвестными являются функция тока I_z и константы a_1 и a_2 .

Введем сетки узлов $x_k = -l + \frac{kl}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, 2N+2$

и $y_k = -l - \frac{l}{N} + \frac{kl}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, 2N+2$.

Приближенное решение будем искать в виде $2N+2$ -мерного вектора

$$\alpha = (a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{2N-1}),$$

где $\alpha_k = I_z(x_k)$, $k = 0, 1, \dots, 2N-2$, $\alpha_{2N-1} = I(x_{2N})$, коэффициенты a_1 , a_2 , $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{2N-1}$ которого находятся из системы уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \frac{l}{N} \sum_{m=0}^{2N-2} I_z(x_m) \frac{e^{-ikR_a(x'_j - x_m)}}{4\pi R_a(x'_j - x_m)} + \frac{1}{4\pi} \frac{l}{N} I_z(x_{2N}) \frac{e^{-ikR_a(x'_j - x_m)}}{4\pi R_a(x'_j - x_m)} - \\ & - \frac{a_1 + a_2 - F(-l) - F(l)}{2 \cos(kl)} \cos(kx'_j) - \frac{a_2 - a_1 - F(l) + F(-l)}{2 \sin(kl)} \sin(kx'_j) = f(x'_j), \\ & j = 0, 1, \dots, 2N+1. \end{aligned} \quad (25)$$

Для решения системы (25) используем непрерывный метод решения операторных уравнений (21), (22)

$$\begin{aligned} \frac{da_1(u)}{du} &= \frac{1}{4\pi} \frac{l}{N} \sum_{m=0}^{2N-2} \alpha_m(u) \frac{e^{-ikR_a(x'_1 - x_m)}}{4\pi R_a(x'_1 - x_m)} + \frac{1}{4\pi} \frac{l}{N} \alpha_{2N-1}(u) \frac{e^{-ikR_a(x'_1 - x_m)}}{4\pi R_a(x'_1 - x_m)} - \\ & - a_1(u) \frac{a_1(u) + a_2(u) - F(-l) - F(l)}{2 \cos(kl)} \cos(kx'_1) - \\ & - \frac{a_1(u) - a_2(u) - F(l) + F(-l)}{2 \sin(kl)} \sin(kx'_1) = f(x'_1), \\ \frac{da_2(u)}{du} &= \frac{1}{4\pi} \frac{l}{N} \sum_{m=0}^{2N-2} \alpha_m \frac{e^{-ikR_a(x'_2 - x_m)}}{4\pi R_a(x'_2 - x_m)} + \frac{1}{4\pi} \frac{l}{N} \alpha_{2N-1} \frac{e^{-ikR_a(x'_2 - x_m)}}{4\pi R_a(x'_2 - x_m)} - \\ & - \frac{a_1(u) + a_2(u) - F(-l) - F(l)}{2 \cos(kl)} \cos(kx'_2) - \\ & - \frac{a_1(u) - a_2(u) - F(l) + F(-l)}{2 \sin(kl)} \sin(kx'_2) = f(x'_2), \\ \frac{d\alpha_v(u)}{du} &= \frac{1}{4\pi} \frac{l}{N} \sum_{m=0}^{2N-2} \alpha_m \frac{e^{-ikR_a(x'_v - x_m)}}{4\pi R_a(x'_v - x_m)} + \frac{1}{4\pi} \frac{l}{N} \alpha_{2N-1} \frac{e^{-ikR_a(x'_v - x_m)}}{4\pi R_a(x'_v - x_m)} - \\ & - \frac{a_1(u) + a_2(u) - F(-l) - F(l)}{2 \cos(kl)} \cos(kx'_v) - \\ & - \frac{a_1(u) - a_2(u) - F(l) + F(-l)}{2 \sin(kl)} \sin(kx'_v) = f(x'_v), \quad v = 0, 1, \dots, 2N-1 \end{aligned}$$

и, в случае необходимости, его модификации [3].

Проиллюстрируем метод несколькими модельными примерами.

Были проведены вычислительные эксперименты, целью которых было определить при каких относительных значениях величины зазора к длине вибратора уравнения Поклингтона и Галлена достаточно точно моделируют физические процессы в вибраторе. При выводе этих уравнений было сделано предположение о том, что ток на концах вибратора равен нулю. Приводимые ниже результаты вычислительных экспериментов подтверждают соответствие уравнений Поклингтона и Галлена физическим процессам в вибраторе при выполнении условия $d/l \leq 0.1$.

Замечание. Вычислительные эксперименты с уравнениями Поклингтона и Галлена показали, что эти уравнения соответствуют физике процессов, происходящих в вибраторе при выполнении условия $d/l \leq 0.1$.

Второй случай. В этом случае коэффициенты A и B однозначно не определяются и следует изменить постановку задачи.

Возьмем значения x_1^* и x_2^* такие, что $\cos(kx_1^*) \neq 0$, $\sin(kx_1^*) \neq 0$, $i = 1, 2$ и рассмотрим краевую задачу

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right) U(z) = f(z). \quad (26)$$

$$U(x_1^*) = a_1, U(x_2^*) = a_2, \quad (27)$$

повторяя рассуждения при исследовании краевой задачи (21), (22).

Аналогично рассматривается третий случай когда $\sin(kl) = 0$.

4. Вычислительные эксперименты

В данном разделе представлены результаты численных экспериментов по определению параметров электрических вибраторов, при которых математические модели, представленные уравнениями Поклингтона и Галлена, соответствуют физическим процессам.

Уравнение Поклингтона решалось (см. табл. 1–4) при следующих значениях параметров:

$$l = 0.1, k = 16.11, \lambda = 0.39, a = 0.0025, \frac{a}{2l} = 0.0125, \frac{2l}{\lambda} = 0.5128$$

и при числе узлов коллокации $2N = 100$.

Таблица 1

Зависимость значений тока на концах вибратора и параметров a_1 и a_2 от ширины зазора. Функция $f(z)$ в зазоре $(-h; h)$ является постоянной функцией

	$h = 0.01l$	$h = 0.02l$	$h = 0.05l$	$h = 0.1l$	$h = 0.2l$
$I(-l)$	0.0060002 – – 0.0003160I	0.0119991 – – 0.0006320I	0.0299766 – – 0.0015789I	0.0598013 – – 0.0031500I	0.1183919 – – 0.0062379I
$I(l)$	0.0039926 – – 0.0002185I	0.0079844 – – 0.0004370I	0.0199467 – – 0.0010918I	0.0397908 – – 0.0021782I	0.0787640 – – 0.0043134I

Таблица 2

Зависимость значений тока на концах вибратора и параметров a_1 и a_2 от ширины зазора. Функция $f(z)$ в зазоре $(-h; h)$ является дельта-образной функцией

	$h = 0.01l$	$h = 0.02l$	$h = 0.05l$	$h = 0.1l$	$h = 0.2l$
$I(-l)$	0.0060002 – – 0.0003160I	0.0089997 – – 0.0004740I	0.0227890 – – 0.0012003I	0.0449072 – – 0.0023654I	0.0892461 – – 0.0047016I
$I(l)$	0.0039926 – – 0.0002185I	0.0059885 – – 0.0003278I	0.0151641 – – 0.0008300I	0.0298810 – – 0.0016356I	0.0593783 – – 0.0032511I

Таблица 3

Зависимость значений тока на концах вибратора и параметров a_1 и a_2 от ширины зазора. Функция $f(z)$ в зазоре $(-d; d)$ является периодической функцией $f(z) = \sin z$.

	$h = 0.01l$	$h = 0.02l$	$h = 0.05l$	$h = 0.1l$	$h = 0.2l$
$I(-l)$	$7 \cdot 10^{-10} +$ $+ 1 \cdot 10^{-10}I$	$7.1 \cdot 10^{-9} +$ $+ 3 \cdot 10^{-9}I$	$1.2 \cdot 10^{-7} -$ $- 4.5 \cdot 10^{-9}I$	$9.4 \cdot 10^{-7} -$ $- 3.7 \cdot 10^{-8}I$	$0.0000074 -$ $- 0.0000003I$
$I(l)$	$3 \cdot 10^{-10} +$ $+ 1 \cdot 10^{-10}I$	$3.1 \cdot 10^{-9} +$ $+ 2 \cdot 10^{-10}I$	$5.1 \cdot 10^{-8} -$ $- 3.2 \cdot 10^{-9}I$	$4.1 \cdot 10^{-7} -$ $- 2.6 \cdot 10^{-8}I$	$0.0000032 -$ $- 0.0000002I$

Таблица 4

Зависимость значений тока на концах вибратора и параметров a_1 и a_2 от ширины зазора. Функция $f(z)$ в зазоре $(-h; h)$ является периодической функцией $f(z) = \sin \frac{\pi z}{\text{beta}_1}$.

	$h = 0.01l$	$h = 0.02l$	$h = 0.05l$	$h = 0.1l$	$h = 0.2l$
$I(-l)$	0.00000142 – – 0.00000006I	0.00000040 – – 0.00000002I	0.0000230 – – 0.00000009I	0.0000907 – – 0.0000035I	0.0003581 – – 0.0000139I
$I(l)$	0.00000062 – – 0.00000004I	0.00000018 – – 0.00000001I	0.0000100 – – 0.00000006I	0.0000395 – – 0.0000025I	0.0001552 – – 0.0000097I

Уравнение Галлена решалось (см. табл. 5–7) при следующих значениях параметров:

$$l = 0.1, k = 16.11, \lambda = 0.39, a = 0.0025, \frac{a}{2l} = 0.0125, \frac{2l}{\lambda} = 0.5128$$

и при числе узлов коллокации $2N = 100$.

Таблица 5

Зависимость значений тока на концах вибратора и параметров a_1 и a_2 от ширины зазора. Функция $f(z)$ в зазоре $(-h; h)$ является постоянной функцией

	$h = 0.01l$	$h = 0.02l$	$h = 0.05l$	$h = 0.1l$	$h = 0.2l$
$I(-l)$	-0.046750+ +0.054030I	-0.018810+ +0.021590I	-0.046750+ +0.054030I	-0.094890+ +0.107580I	-0.195160+ +0.212650I
$I(l)$	-0.047510+ +0.053840I	-0.018810+ +0.021590I	-0.047510+ +0.053840I	-0.094890+ +0.107580I	-0.195160+ +0.212650I
a_1	0.001340– –0.002850I	0.000700– –0.001310I	0.001340– –0.002850I	0.003560– –0.006520I	0.007380– –0.012910I
a_2	0.005280– –0.003690I	0.001940– –0.001310I	0.005280– –0.003690I	0.009730– –0.006520I	0.019570– –0.012910I

Таблица 6

Зависимость значений тока на концах вибратора и параметров a_1 и a_2 от ширины зазора. Функция $f(z)$ в зазоре $(-h; h)$ является дельта-образной функцией

	$h = 0.01l$	$h = 0.02l$	$h = 0.05l$	$h = 0.1l$	$h = 0.2l$
$I(-l)$	0.000001+ +0.000000I	-0.018811+ +0.021595I	-0.033893+ +0.038855I	-0.071883+ +0.081871I	-0.144367+ +0.160419I
$I(l)$	-0.000001+ +0.000000I	-0.018811+ +0.021595I	-0.033893+ +0.038855I	-0.071883+ +0.081871I	-0.144367+ +0.160419I
a_1	0.000000+ +0.000000I	0.000703– –0.001309I	0.001267– –0.002356I	0.002691– –0.004965I	0.005436– –0.009736I
a_2	46.513700+ +0.000000I	0.001633– –0.001309I	0.003591– –0.002356I	0.007330– –0.004965I	0.014638– –0.009736I

Таблица 7

Зависимость значений тока на концах вибратора и параметров a_1 и a_2 от ширины зазора. Функция $f(z)$ в зазоре $(-h; h)$ является периодической функцией $f(z) = \sin z$.

	$h = 0.01l$	$h = 0.02l$	$h = 0.05l$	$h = 0.1l$	$h = 0.2l$
$I(-l)$	-0.000002+ +0.000002I	$3 \cdot 10^{-8}+$ $+8 \cdot 10^{-9}I$	-0.0000088+ +0.0000109I	0.0000050+ +0.0000013I	0.0000417+ +0.0000102I
$I(l)$	-0.000002+ +0.000002I	$-3 \cdot 10^{-8}-$ $-8 \cdot 10^{-9}I$	-0.0000101+ +0.0000106I	-0.0000050– –0.0000013I	-0.0000417– –0.0000102I
a_1	0.000000– –0.000000I	$-3.4 \cdot 10^{-8}+$ $+3.4 \cdot 10^{-9}I$	-0.0000004+ +0.0000001I	-0.0000056+ +0.0000056I	-0.0000457+ +0.0000449I
a_2	0.000000– –0.000000I	$3.4 \cdot 10^{-8}-$ $-3.4 \cdot 10^{-9}I$	0.0000011– –0.0000014I	0.0000056– –0.0000056I	0.0000459– –0.0000449I

Выводы

В работе построены вычислительные схемы приближенного решения уравнений Поклингтона и Галлена, позволяющие оценить значения тока на концах вибратора. Показано, что при выполнении условия «величина зазора/длина вибратора меньше 0.1» математическая

модель, представленная уравнениями Поклингтона и Галлена, адекватна физическим процессам.

Список литературы

1. Бойков И. В. Об одном непрерывном методе решения нелинейных операторных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 9. С. 1308–1314.
2. Бойков И. В., Айкашев П. В. Применение непрерывного операторного метода к решению уравнений Поклингтона и Галлена для тонких проволочных антенн // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2020. № 3 (55). С. 127–146. doi: 10.21685/2072-3040-2020-3-10
3. Бойков И. В., Пивкина А. А. Об одном приближенном методе восстановления функции по ее автокорреляционной функции // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2022. № 3. С. 43–57. doi: 10.21685/2072-3040-2022-3-5
4. Бойков И. В., Рязанцев В. А. Об одном итерационном методе решения прямых и обратных задач для параболических уравнений // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, вып. 3. С. 286–310. doi: 10.18500/1816-9791-2023-23-3-286-310. EDN: HMFDHB
5. Бойков И. В., Тарасов Д. В. Применение гиперсингулярных интегральных уравнений к численному моделированию электрического вибратора // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2008. № 8. С. 94–106.
6. Войтович Н. И., Ершов А. В., Соколов А. Н. УКВ вибраторные антенны : учеб. пособие. Челябинск : Изд. ЮУрГУ, 2002. 85 с.
7. Ключев Д. С., Коршунов С. А., Мишин Д. В., Ситникова С. В., Соколова Ю. В. Сингулярное интегральное уравнение для плотности тока на поверхности полоскового вибратора, расположенного в свободном пространстве // Письма в Журнал технической физики. 2018. Т. 44, вып. 12. С. 26–31.
8. Вычислительные методы в электродинамике / под ред. Р. Митры. М. : Мир, 1977. 488 с.
9. Fikioris G., Tai Tsun Wu. On the Application of Numerical Methods to Hallén's Equation // Transactions on antennas and propagation. 2001. Vol. 49, № 3. P. 383–392.
10. Harrington R. F. Field computation by moment methods. N.Y. : Macmillan, 1966.
11. Silvester P., Chan K. K. Bubnov – Galerkin solutions to wire-antennas problems // Institution of Electrical Engineers Proceedings. 1972. Vol. 119. P. 1095–1099.
12. Лозинский С. М. Замечание о статье В. С. Годлевского // Журнал вычислительной математики и математической физики 1973. Т. 13, № 2. С. 457–459.

3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.6

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЯДРОМ ТИПА КОШИ НА ЗАМКНУТЫХ КОНТУРАХ

*Наталья Юрьевна Кудряшова¹,
Салих Рустямович Багдалов²*

^{1,2} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹ math.kudryashova@yandex.ru, ² bagdalovsalikh@yandex.ru

Аннотация. Исследуются приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений с ядром типа Коши на замкнутых контурах интегрирования. Получены достаточные условия однозначной разрешимости приближенных уравнений, а также оценена погрешность метода коллокации.

Ключевые слова: сингулярное интегральное уравнение, интеграл типа Коши, ядро Гильберта, метод коллокации, квадратурная формула, теорема Адамара

ON AN APPROXIMATE METHOD FOR SOLVING SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS WITH A CAUCHY-TYPE KERNEL ON CLOSED CONTOURS

Natalya Yu. Kudryashova¹, Salikh R. Bagdalov²

^{1,2} Penza State University, Penza, Russia

¹ math.kudryashova@yandex.ru, ² bagdalovsalikh@yandex.ru

Abstract. Approximate methods for solving singular integral equations with a Cauchy-type kernel on closed contours are investigated. Sufficient conditions for unambiguous solvability of approximate equations are obtained and the error of the collocation method is estimated.

Keywords: singular integral equation, Cauchy integral, Hilbert kernel, collocation method, quadrature formula, Hadamard theorem

Сингулярные интегральные уравнения находят свое применение во многих областях физики и технологий. При исследовании многих задач теории упругости, физики, аэродинамики, электродинамики возникает необходимость в решении сингулярных интегральных уравнений. Но так как точные решения таких уравнений чаще всего бывают

неизвестными, возникает вопрос о необходимости построения и реализации численных методов решения сингулярных интегральных уравнений. Фундаментальный вклад в становление и развитие приближенных методов решения СИУ внесли такие ученые как Белоцерковский С. М., Бойков И. В., Гохберг И. Ц., Иванов В. В., Лаврентьев М. А., Лаврентьев М. М., Лифанов И. К. и многие другие [1, 2, 3].

Рассмотрим сингулярное интегральное уравнение

$$a(t)x(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{x(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_{\gamma} h(t, \tau)x(\tau)d\tau = f(t), t \in \gamma, \quad (1)$$

где γ – единичная окружность с центром в начале координат на комплексной плоскости, $b(t) \neq 0$.

Будем полагать, что $a(t), b(t), x(t) \in H_{\alpha}$.

К уравнению (1) применим преобразование Гильберта. Для простоты обозначений будем ниже рассматривать уравнение

$$a(s)x(s) + \frac{b(s)}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} d\sigma + \int_0^{2\pi} h(s, \sigma)x(\sigma)d\sigma = f(s). \quad (2)$$

Построим вычислительную схему для решения уравнения (2). Для этого выберем две системы узлов

$$s_k = \frac{\pi k}{n}, \quad s_k^* = \frac{\pi k}{n} + h, \quad 0 < h < \frac{\pi}{2n}, \quad k = 0, \dots, 2n.$$

Решение будем искать в виде интерполяционного полинома

$$x_n(s) = \sum_{k=0}^{2n-1} a_k \psi_k(s),$$

где

$$\psi_k(s) = \begin{cases} 0, & s = s_l^*, l \neq k; \\ 1, & s = s_k^*. \end{cases}$$

Построим квадратурную формулу для вычисления сингулярного интеграла

$$I_1 x = \int_0^{2\pi} x(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} d\sigma. \quad (3)$$

При $s \in (s_j, s_{j+1})$ она будет иметь вид

$$I_1 x = \sum_{k=0, k \neq j-1, j+1}^{2n-1} x(s_k^*) \int_{s_k}^{s_{k+1}} \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} d\sigma + R_n. \quad (4)$$

Справедлива оценка погрешности квадратурной формулы

$$R_n \leq A n^{-\alpha} \ln n.$$

К уравнению (2) применим метод коллокации, воспользовавшись предыдущей квадратурной формулой для вычисления сингулярного интеграла, применяя квадратурную формулу прямоугольников к регулярному интегралу и принимая за узлы коллокации $s_k^*, k = 0, \dots, 2n-1$. При этом получим систему линейных алгебраических уравнений следующего вида

$$a(s_j^*)x(s_j^*) + \frac{b(s_j^*)}{2\pi} \sum_{k=0, k \neq j-1, j+1}^{2n-1} x(s_k^*) \int_{s_k}^{s_{k+1}} \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s_j^*}{2} d\sigma + \\ + \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} h(s_j^*, s_k^*) x(s_k^*) = f(s_j^*), j = 0, \dots, 2n-1, \quad (5)$$

где входящие в (5) определенные интегралы вычисляются аналитически.

Воспользуемся методом Гаусса для решения системы (5).

Докажем, что полученная система имеет единственное решение. Для этого воспользуемся теоремой Адамара [4].

Обозначим для краткости $a_j = a(s_j^*), b_j = b(s_j^*), h_{jk} = h(s_j^*, s_k^*)$.

Рассмотрим диагональные элементы матрицы системы (5)

$$|c_{jj}| = \left| a_j + \frac{b_j}{\pi} \ln \left| \frac{\sin \frac{s_{j+1}^* - s_j^*}{2}}{\sin \frac{s_j^* - s_j^*}{2}} \right| + \frac{\pi h_{jj}}{n} \right| = \left| a_j + \frac{b_j}{\pi} \ln \left| \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2n} - \frac{h}{2} \right)}{\sin \frac{h}{2}} \right| + \frac{\pi h_{jj}}{n} \right|.$$

Так как $b_j \neq 0$ при $j = 0, \dots, 2n-1$, то выбором h коэффициенты c_{jj} могут быть сделаны как угодно большими. С другой стороны, из-за симметричности функции $\sin s$ относительно $\pi/2$, имеем

$$\sum_{k=0, k \neq j}^{2n-1} |c_{jk}| \leq \frac{\pi}{n} \sum_{k=0, k \neq j}^{2n-1} |h_{jk}| + \frac{|b_j|}{2\pi} \sum_{k=0, k \neq j, j-1, j+1}^{2n-1} \left| \int_{s_k}^{s_{k+1}} \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s_j^*}{2} d\sigma \right| \leq \\ \leq H + \frac{|b_j|}{2\pi} \sum_{k=0, k \neq j-1, j, j+1}^{2n-1} \int_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{1}{\left| \sin \frac{\sigma - s_j^*}{2} \right|} d\sigma \leq H + \frac{|b_j|}{\pi} \sum_{k=2}^{n-1} \int_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{d\sigma}{\sin \frac{\sigma - h}{2}} \leq \\ \leq H + |b_j| \sum_{k=2}^{n-1} \int_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{d\sigma}{\sigma - h} \leq H + |b_j| \sum_{k=2}^{n-1} \ln \frac{s_{k+1} - h}{s_k - h} \leq H + |b_j| \ln \frac{s_n - h}{s_2 - h} \leq \\ \leq H + |b_j| \ln \frac{\pi n - nh}{2\pi - nh} \leq H + B \ln \frac{2n}{3} \leq H + B \ln n.$$

Выбором параметра h можно всегда добиться того, чтобы при $j = 0, \dots, 2n-1$ выполнялись условия

$$\left| a_j + \frac{b_j}{\pi} \ln \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2n} - \frac{h}{2}\right)}{\sin \frac{h}{2}} \right| + \frac{\pi h_{jj}}{n} \right| > H + B \ln n,$$

где B, H – вполне определенные константы, зависящие от функций $b(s)$, $h(\sigma, s)$. Таким образом, существуют такие значения h , что система уравнений (5) имеет единственное решение.

Теорема. Пусть уравнение (2) имеет единственное решение $x^*(s) \in H_\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$ и пусть функции $a(s), b(s), f(s) \in H_\alpha$. Тогда существуют такие значения h , что система уравнений (5) имеет единственное решение $x_n^*(s)$ и при h таких, что коэффициент k

$$k = -\frac{nx(s_j^*)}{2\pi} \ln \frac{\sin \frac{h}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2n} - \frac{h}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n} - \frac{h}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{h}{2}\right)}$$

прямой $\psi(\sigma) = \psi(s_j^*) + k(\sigma - s_j^*)$ по модулю меньше или равен $n^{1-\alpha}$,

$|k| \leq n^{1-\alpha}$, справедлива оценка $\|x^* - x_n^*\| \leq A \frac{\ln^3 n}{n^\alpha}$. Здесь $\psi(s)$ определяется из условия:

$$\psi(s_j^*) = x(s_j^*) \text{ и } \int_{s_{j-1}}^{s_j} \psi(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s_j^*}{2} d\sigma + \int_{s_{j+1}}^{s_{j+2}} \psi(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s_j^*}{2} d\sigma = 0.$$

Список литературы

1. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М. : Янус, 1995. 520 с.
2. Бойков И. В. Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений. Пенза : Изд-во ПГУ, 2004. 316 с.
3. Бойков И. В., Кудряшова Н. Ю. Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений в исключительных случаях // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 36, № 9. С. 1230–1237 ; Differ. Equ. 2000. Vol. 36, № 9. P. 1360–1369.
4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М. : Наука, 1967. 576 с.

НЕПОЛИНОМИАЛЬНОЕ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С БОЛЬШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

*Полина Михайловна Антонова¹,
Елена Владимировна Грозная²*

^{1,2} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹ pantonova35@gmail.com, ² comkedrel@mail.ru

Аннотация. Исследуется задача интерполирования функций, имеющих достаточно большие производные, для которых неприменима полиномиальная интерполяция. Дана оценка погрешности метода. Приведены результаты вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: интерполирование, градиенты, пограничный слой

NON-POLYNOMIAL INTERPOLATION OF FUNCTIONS WITH LARGE GRADIENTS

Polina M. Antonova¹, Elena V. Groznaya²

^{1,2} Penza State University, Penza, Russia

¹ pantonova35@gmail.com, ² comkedrel@mail.ru

Abstract. The article investigates the problem of interpolating functions with sufficiently large derivatives for which polynomial interpolation is not applicable. The estimation of the method error is given. The results of computational experiments are considered.

Keywords: interpolation, gradients, boundary layer

1. Введение

В данной статье, следуя [1], рассмотрена интерполяционная формула для функций с большими градиентами, ее применимость для приближения различного рода функций, погрешность, а также приведены численные эксперименты аппроксимации ряда функций со значительными производными.

Многочлен Лагранжа широко используется для интерполяции функций. Однако в случае функций с большими градиентами применение интерполяции Лагранжа может приводить к погрешностям порядка $O(1)$ (см. [1]). Следовательно, актуален вопрос построения интерполяционных формул для функций с большими градиентами в пограничном слое. Интерполяционная формула должна строиться таким образом, чтобы ее погрешность была равномерной по резким изменениям функции

в пограничном слое. Для построения таких формул можно выделить два подхода: применение интерполяции Лагранжа на сетке, сгущающейся в области пограничного слоя и построение специальных интерполяционных формул, основанных на подгонке к погранслойной составляющей функции.

Рассмотрим вопрос интерполяции функции, представимой в виде

$$u(x) = p(x) + \gamma \Phi(x), \quad x \in [a, b], \quad (1)$$

где функция $u(x)$ является достаточно гладкой, погранслойная составляющая $\Phi(x)$ известна и имеет большие градиенты на интервале $[a, b]$, регулярная составляющая $p(x)$ ограничена вместе с производными до некоторого порядка, постоянная γ не задана. При этом

$$\Phi(x) = e^{-mx/\varepsilon}, \quad x \in [0, 1], \quad m > 0, \varepsilon \in (0, 1] \quad (2)$$

Производные функции $\Phi(x)$ неограниченно растут с уменьшением параметра ε , из-за чего погрешность полиномиальных интерполяционных формул становится порядка $O(1)$.

2. Анализ интерполяционной формулы

Пусть Ω^h – равномерная сетка интервала $[a, b]$:

$$\Omega^h = \{x_n: x_n = a + (n-1)h, x_1 = a, x_k = b, n = 1, 2, \dots, k\}$$

Предполагаем, что функция $u(x)$ вида (1) задана в узлах сетки $u_n = u(x_n)$.

Пусть $L_n(u, x)$ – многочлен Лагранжа для функции $u(x)$ с узлами интерполяции x_1, \dots, x_n . Покажем, что применение многочлена Лагранжа к функции вида (1.1) может приводить к значительным погрешностям. Для этого зададим $u(x) = e^{-x/\varepsilon}$ при $x \in [0, 1]$. Пусть $\varepsilon = h$, тогда при интерполяции на интервале $[0, h]$ выполнится $L_2(u, h/2) - u(h/2) \approx 0.075$.

Итак, точность интерполяции не повышается с уменьшением шага h , если $\varepsilon = h$.

Для интерполяции функции вида (1) построена интерполяционная формула

$$L_{\Phi, k}(u, x) = L_{k-1}(u, x) + \frac{[x_1, \dots, x_k]u}{[x_1, \dots, x_k]\Phi} [\Phi(x) - L_{k-1}(\Phi, x)] \quad (3)$$

где $[x_1, \dots, x_k]$ – разделенная разность для функции $u(x)$

Пусть

$$\Phi^{(k-1)}(x) \neq 0, x \in (a, b) \quad (4)$$

Тогда знаменатель в (3) не обращается в нуль и формула задана корректно.

Покажем, что формула (3) является интерполяционной. Преобразуем формулу (3). В соответствии с [4], справедливо соотношение

$$L_k(u, x) = L_{k-1}(u, x) + r_{k-1}(x)[x_1, x_2, \dots, x_k]u \quad (5)$$

где $r_{k-1}(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{k-1})$. Учитывая (5), из (3) получаем

$$L_{\Phi,k}(u, x) = L_k(u, x) + \frac{[x_1, \dots, x_k]u}{[x_1, \dots, x_k]\Phi} [\Phi(x) - L_k(\Phi, x)] \quad (6)$$

Очевидно, что формула (4) является интерполяционной с узлами интерполяции x_1, \dots, x_k . Следовательно, и формула в виде (3) является интерполяционной.

Учитывая, что, согласно [4, с. 44]

$$\Phi(x) - L_{k-1}(\Phi, x) = r_{k-1}(x)[x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x]\Phi \quad (7)$$

$$u(x) - L_k(u, x) = \frac{u^{(k)}(s)}{k!} r_k(x), \exists s \in (a, b) \quad (8)$$

получаем, что формула (3) является точной на многочленах степени $(k - 2)$ и на функции $\gamma\Phi(x)$.

В работе [1] также получены следующие теоретические оценки:

Лемма 1. Пусть выполнено условие (4),

$$M_k(\Phi, x) = \frac{\Phi(x) - L_{k-1}(\Phi, x)}{\Phi(x_k) - L_{k-1}(\Phi, x_k)} \quad (9)$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \max_x |L_{\Phi,k}(u, x) - u(x)| \leq \\ & \leq \max_x |L_{k-1}(p, x) - p(x)| (1 + \max_x |M_k(\Phi, x)|) \end{aligned} \quad (10)$$

Следствие 1. Учитывая (8), из (10) получаем

$$\begin{aligned} & \max_x |L_{\Phi,k}(u, x) - u(x)| \leq \\ & \leq \max_x |p^{k-1}(x)| (1 + \max_x |M_k(\Phi, x)|) h^{k-1}, x \in [a, b] \end{aligned}$$

Лемма 2. Пусть

$$\Phi^{(k-1)}(x) \neq 0, \Phi^k(x) \neq 0, k \geq 2, x \in (a, b) \quad (11)$$

Тогда

$$\max_x |L_{\Phi,k}(u, x) - u(x)| \leq 2 \max_x |L_{k-1}(p, x) - p(x)|, x \in [a, b] \quad (12)$$

В соответствии с леммой 2 при ограничениях (11) оценка погрешности построенной интерполяционной формулы (3) сведена к оценке погрешности интерполяции многочленом Лагранжа $L_{k-1}(p, x)$ на регулярной составляющей $p(x)$. Для оценки погрешности интерполяции многочленом Лагранжа $L_{k-1}(p, x)$ известны оценки через $\max |p^{k-1}(x)|$ и в интегральной форме.

С учетом известной оценки погрешности интерполяции многочленом Лагранжа на равномерной сетке (см. [4]):

$$|L_k(p, x) - p(x)| \leq \max_x |p^{(k)}(s)| h^k, x \in [a, b] \quad (13)$$

из (12) получаем

$$\max_x |L_{\Phi,k}(u, x) - u(x)| \leq 2 \max_x |p^{(k-1)}(x)| h^{k-1}, x \in [a, b] \quad (14)$$

Для отдельных значений k можно выписать оценку погрешности интерполяции многочленом Лагранжа в интегральной форме. Например,

$$|L_2(p, x) - p(x)| \leq h \int_a^b |p''(s)| ds, x \in [a, b] \quad (15)$$

Тогда из (12) получаем

$$\max_x |L_{\Phi,3}(u, x) - u(x)| \leq 2h \int_a^b |p''(s)| ds, x \in [a, b]$$

З а м е ч а н и е 1. Условия (11) выполнены для пограничных слоев следующих видов: экспоненциального пограничного слоя, когда $\Phi(x)$ соответствует (2);

степенного пограничного слоя,

$$\Phi(x) = (x + \varepsilon)^a, 0 < a < 1, \quad x > 0, \varepsilon > 0$$

слоя с логарифмической особенностью,

$$\Phi(x) = \ln x, x \geq \varepsilon > 0$$

3. Численные эксперименты.

Рассмотрим сначала функцию вида (1):

$$u(x) = \cos(\pi x/2) + e^{-\sqrt{x}/\varepsilon}, x \in [0,1], \varepsilon > 0.$$

При этом $\Phi(x) = e^{-x/\varepsilon}$. Предполагаем, что число сеточных интервалов N четно и разобьем интервал $[0,1]$ на непересекающиеся интервалы вида $[x_{n-1}, x_{n+1}]$, где $n = 1, 3, \dots, N-1$. На каждом таком интервале зададим интерполяционную формулу (2.1) при $k = 3$:

$$\begin{aligned} L_{\Phi,3}(u, x) = & u_{n-1} + \frac{u_n - u_{n-1}}{h} (x - x_{n-1}) \\ & + \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{\Phi_{n+1} - 2\Phi_n + \Phi_{n-1}} \left[\Phi(x) - \Phi_{n-1} \right. \\ & \left. - \frac{\Phi_n - \Phi_{n-1}}{h} (x - x_{n-1}) \right], \\ & x \in [x_{n-1}, x_{n+1}] \end{aligned}$$

Зададим погрешность интерполяции многочленом Лагранжа

$$\Delta_{\varepsilon,N} = \max_{1 \leq n \leq N} |u(\tilde{x}_n) - L_3(u, \tilde{x}_n)|, \tilde{x}_n = (x_n + x_{n-1})/2$$

На рис. 1 приведена погрешность интерполяции $\Delta_{\varepsilon,N}$ многочленом Лагранжа $L_3(u, x)$ в зависимости от ε и N . При малых значениях ε погрешность не убывает при уменьшении шага сетки. Это подтверждает неприемлемость применения для интерполяции многочлена Лагранжа на равномерной сетке при наличии пограничного слоя.

Результат по равномерной сетке		
x	Ln(x)	Ln(x) - f(x)
0	2	0
0.1	0.987688	0
0.2	0.951057	0
0.3	0.891007	2.33147e-15
0.4	0.809017	0
0.5	0.707107	0
0.6	0.587785	0
0.7	0.45399	2.77556e-16
0.8	0.309017	4.10227e-14
0.9	59.8883	59.7319
1	-1.31716e+29	1.31716e+29

Рис. 1

На рис. 2 аналогичным образом представлена погрешность интерполянта $L_3(u, x)$ и вычисленный порядок точности $M_{\varepsilon, N} = \log_2 \left(\frac{\Delta_{\varepsilon, N}}{\Delta_{\varepsilon, 2N}} \right)$. Из рис. 2 следует, что порядок точности интерполяционной формулы понижается с 3 до 2 при уменьшении, результаты вычислений согласуются с оценкой (14) при $k = 3$.

Е	Погрешность
1	0
0.1	1.10^-21
0.01	1.536*10^-21
0.001	3.720076*10^-44
0.0001	5.075959*10^-435
0.00001	1.135484*10^-4343

Рис. 2

Рассмотрим еще одну функцию вида (1):

$$u(x) = \cos(\pi x/2) + \frac{e^{-\sqrt{x}/\varepsilon}}{2 * \pi}, x \in [0,1], \varepsilon > 0.$$

При этом

$$\Phi(x) = \frac{e^{-\sqrt{x}/\varepsilon}}{2 * \pi}.$$

На рис. 3 показана погрешность интерполяции $\Delta_{\varepsilon, N}$ многочленом Лагранжа $L_3(u, x)$ в зависимости от ε и N .

Результат по равномерной сетке

x	Ln(x)	Ln(x) - f(x)
0	2	0
0.1	0.994208	0
0.2	0.951867	0
0.3	0.89117	1.77636e-15
0.4	0.80906	0
0.5	0.70712	0
0.6	0.58779	0
0.7	0.453992	2.77556e-16
0.8	0.309018	4.02456e-14
0.9	63.7151	63.5586
1	-1.28666e+29	1.28666e+29

Рис. 3

На рис. 4 также представлена погрешность интерполянта $L_3(u, x)$ и вычисленный порядок точности $M_{\varepsilon, N} = \log_2 \left(\frac{\Delta_{\varepsilon, N}}{\Delta_{\varepsilon, 2N}} \right)$

Е	Погрешность
1	0
0.1	5.10 ⁻²¹
0.01	2.86259632*10 ⁻²¹
0.001	5.920685*10 ⁻⁴⁵
0.0001	8.0786395*10 ⁻⁴³⁶
0.00001	1.807187*10 ⁻⁴³⁴⁴

Рис. 4

Как видно из представленных результатов, инструмент неполиномиальной интерполяции показывает свою эффективность на определенных классах функций и эти результаты согласуются с известными теоретическими оценками погрешностей.

Список литературы

1. Задорин А. И. Метод интерполяции для задачи с пограничным слоем // Сибирский журнал вычислительной математики. 2007. Т. 10, № 3. С. 267–275.
2. Шишкин Г. И. Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. Екатеринбург : УрО РАН, 1992.
3. Бахвалов Н. С. К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1969. Т. 9, № 4. С. 841–859.
4. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М. : Наука, 1987.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

*Наталья Юрьевна Кудряшова¹,
Лилия Александровна Купряшина²*

^{1,2} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
¹ math.kudryashova@yandex.ru, ² liliya_sl@mail.ru

Аннотация. Рассматривается решение задачи аналитического продолжения в пространстве, строится кубатурная формула для вычисления двойного интеграла.

Ключевые слова: численные методы, аналитическое продолжение функции, кубатурная формула

NUMERICAL METHODS FOR SOLVING THE PROBLEM OF ANALYTICAL CONTINUATION OF HARMONIC FUNCTIONS IN THREE-DIMENSIONAL SPACE

Natalya Yu. Kudryashova¹, Liliya A. Kupriashina²

^{1,2} Penza State University, Penza, Russia
¹ math.kudryashova@yandex.ru, ² liliya_sl@mail.ru

Abstract. The article examines the solution to the problem of analytical continuation in space and constructs a cubature formula for solving the integral.

Keywords: numerical methods, analytical continuation of a function, cubature formula

Изложенные ранее численные методы решения задачи аналитического продолжения [4], в частности метод сингулярных интегральных уравнений, сеточный метод, применимы для функций на плоскости. Случай трехмерного пространства не был рассмотрен. Поэтому, представляется интересным построение численных методов приближенного решения задачи аналитического продолжения гармонических функций в трехмерном пространстве.

Пусть дана какая-то замкнутая поверхность S , и пусть в области $D \subset D^*$, ограниченной поверхностью S задана гармоническая функция $\vec{\phi} = \vec{i}\phi_1(x, y, z) + \vec{j}\phi_2(x, y, z) + \vec{k}\phi_3(x, y, z)$, причем существует такая вещественная потенциальная функция $U(\Delta U = 0)$, что $\text{grad } U = \vec{\phi}$.

Требуется найти приближенные значения функции $\bar{\phi}$ во всей области D^* . Будем считать, что функции $\phi_1(x, y, z), \phi_2(x, y, z), \phi_3(x, y, z) \in H_{\alpha, \alpha, \alpha}$.

Выберем в области D^* замкнутую поверхность S_1 , ограничивающую область D_1 , такую что $D \subset D_1$. Известно [3], что если функция $\bar{\phi}(r)$ аналитическая в области D_1 , то ее значения внутри этой области определяются формулой (1)

$$-\frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \left[(n \cdot \phi(r)) \text{grad} \frac{1}{|r - r_1|} + [n \times \phi(r)] \times \text{grad} \frac{1}{|r - r_1|} \right] ds = \begin{cases} \phi(r_1), & r_1 \in D_1; \\ 0, & r_1 \in D_1. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $r = (x, y, z) \in S_1$, $r_1 = (x_1, y_1, z_1) \in S$, n – вектор нормали к поверхности S_1 . Для решения поставленной задачи будем использовать метод коллокации. Выберем две системы узлов r_k и $r_{1k}, k = 1, \dots, N^3$, решение будем искать в виде полинома [1]

$$\phi_m(x, y, z) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \phi_m(x_k, y_i, z_j) \psi_k(x) \psi_i(y) \psi_j(z), \quad m = 1, 2, 3,$$

где ψ_i – i -й фундаментальный полином Лагранжа, $\phi_m(x_k, y_i, z_j)$ найдем из следующей системы линейных алгебраических уравнений.

$$-\frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{N^3} \left[(n \cdot \phi(r_k)) \text{grad} \frac{1}{|r_k - r_{1j}|} + [n \times \phi(r_k)] \times \text{grad} \frac{1}{|r_k - r_{1j}|} \right] \Delta s_k = \phi(r_{1j}), \quad k, j = 1, \dots, N^3, \quad (2)$$

где Δs_k – площадь k -го сегмента поверхности S_1 .

Аналогично по значениям функции ϕ на поверхности S_1 найдем значения функции на поверхности S_2 , ограничивающей область $D_2 \supset D_1$. Продолжая процесс по указанному алгоритму, восстановим функцию во всей области D^* .

Будем для простоты рассматривать в качестве поверхности S сферу с центром в начале координат радиуса R (обозначим ее $S(0, R)$), а в качестве области D соответственно ограничиваемый этой сферой шар. Предположим, что нам известны точные значения функции $\bar{\phi}(x, y, z)$ на сфере S , и что функция $\bar{\phi}$ является гармонической в шаре с радиусом $R + h$. Тогда решая уравнение (1), где неизвестными являются значения функции $\bar{\phi}$ на сфере S_1 с центром в начале координат

с радиусом $R + h$, определяем аналитическое продолжение со сферы S на сферу S_1 .

Рассмотрим интеграл

$$I\phi = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \left[(n \cdot \phi(r)) \operatorname{grad} \frac{1}{|r - r_1|} + [n \times \phi(r)] \times \operatorname{grad} \frac{1}{|r - r_1|} \right] ds, \quad (3)$$

где r_1 – точка расположенная внутри S .

Перейдем в (3) к сферическим координатам.

$$x = (R + h) \cos t, y = (R + h) \sin t \cos \theta, z = (R + h) \sin t \sin \theta, \\ 0 \leq t \leq \pi, 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Тогда вектор нормали

$$\vec{n} = \{\cos t, \sin t \cos \theta, \sin t \sin \theta\},$$

$$\frac{1}{|r - r_1|} = \frac{1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}} = \\ = 1 / \left[((R + h) \cos t - R \cos t')^2 + ((R + h) \sin t \cos \theta - R \sin t' \cos \theta')^2 + \right. \\ \left. + ((R + h) \sin t \sin \theta - R \sin t' \sin \theta')^2 \right]^{1/2}.$$

Для краткости введем обозначения

$$g_1 = \frac{\partial \frac{1}{|r - r_1|}}{\partial x}, g_2 = \frac{\partial \frac{1}{|r - r_1|}}{\partial y}, g_3 = \frac{\partial \frac{1}{|r - r_1|}}{\partial z}.$$

Здесь

$$g_1(t, \theta, t', \theta') = \left[-\frac{1}{2} (((R + h) \cos t - R \cos t')^2 + ((R + h) \sin t \cos \theta - R \sin t' \cos \theta')^2 + \right. \\ \left. + ((R + h) \sin t \sin \theta - R \sin t' \sin \theta')^2)^{-1/2} \times \right. \\ \left. \times 2((R + h) \cos t - R \cos t') \right] / \left[((R + h) \cos t - R \cos t')^2 + \right. \\ \left. + ((R + h) \sin t \cos \theta - R \sin t' \cos \theta')^2 + ((R + h) \sin t \sin \theta - R \sin t' \sin \theta')^2 \right] = \\ = -[(R + h) \cos t - R \cos t'] / \left[((R + h) \cos t - R \cos t')^2 + \right. \\ \left. + ((R + h) \sin t \cos \theta - R \sin t' \cos \theta')^2 + \right. \\ \left. + ((R + h) \sin t \sin \theta - R \sin t' \sin \theta')^2 \right]^{3/2}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
g_2(t, \theta, t', \theta') = & \left[-\frac{1}{2} (((R+h)\cos t - R\cos t')^2 + ((R+h)\sin t \cos \theta - R\sin t' \cos \theta')^2 + \right. \\
& + ((R+h)\sin t \sin \theta - R\sin t' \sin \theta')^2)^{-1/2} \times \\
& \times 2((R+h)\sin t \cos \theta - R\sin t' \cos \theta') \Big] / \left[((R+h)\cos t - R\cos t')^2 + \right. \\
& + ((R+h)\sin t \cos \theta - R\sin t' \cos \theta')^2 + ((R+h)\sin t \sin \theta - R\sin t' \sin \theta')^2 \Big] = \\
& = -[(R+h)\sin t \cos \theta - R\sin t' \cos \theta'] / \left[((R+h)\cos t - R\cos t')^2 + \right. \\
& + ((R+h)\sin t \cos \theta - R\sin t' \cos \theta')^2 + \\
& \left. + ((R+h)\sin t \sin \theta - R\sin t' \sin \theta')^2 \right]^{3/2}, \tag{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_3(t, \theta, t', \theta') = & -[(R+h)\sin t \sin \theta - R\sin t' \sin \theta'] / \left[((R+h)\cos t - R\cos t')^2 + \right. \\
& + ((R+h)\sin t \cos \theta - R\sin t' \cos \theta')^2 + \\
& \left. + ((R+h)\sin t \sin \theta - R\sin t' \sin \theta')^2 \right]^{3/2}, \tag{6}
\end{aligned}$$

где точки $(R+h, t, \theta) \in S_1$, а $((R, t', \theta') \in S$.

Тогда интеграл будет иметь вид

$$\begin{aligned}
I\phi = & -\frac{(R+h)^2}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \{ (\phi_1(R+h, t, \theta) \cos t + \phi_2(R+h, t, \theta) \sin t \cos \theta + \\
& + \phi_3(R+h, t, \theta) \sin t \sin \theta) (\bar{i}g_1(t, \theta, t', \theta') + \bar{j}g_2(t, \theta, t', \theta') + \bar{k}g_3(t, \theta, t', \theta')) + \\
& + \bar{i}[(\phi_1(R+h, t, \theta) \sin t \sin \theta - \phi_3(R+h, t, \theta) \cos t)g_3(t, \theta, t', \theta') - \\
& - (\phi_2(R+h, t, \theta) \cos t - \phi_1(R+h, t, \theta) \sin t \cos \theta)g_2(t, \theta, t', \theta')] + \\
& + \bar{j}[(\phi_2(R+h, t, \theta) \cos t - \phi_1(R+h, t, \theta) \sin t \cos \theta)g_1(t, \theta, t', \theta') - \\
& - (\phi_3(R+h, t, \theta) \sin t \cos \theta - \phi_2(R+h, t, \theta) \sin t \sin \theta)g_3(t, \theta, t', \theta')] + \\
& + \bar{k}[(\phi_3(R+h, t, \theta) \sin t \cos \theta - \phi_2(R+h, t, \theta) \sin t \sin \theta)g_2(t, \theta, t', \theta') - \\
& - (\phi_1(R+h, t, \theta) \sin t \sin \theta - \phi_3(R+h, t, \theta) \cos t)g_1(t, \theta, t', \theta')] \} \sin t. \tag{7}
\end{aligned}$$

Построим кубатурную формулу для вычисления интеграла (7). Для этого выберем узлы

$$t_k = \frac{\pi k}{N}, \theta_k = \frac{2\pi k}{N}, k = 1, \dots, N. \tag{8}$$

Кубатурная формула будет иметь вид [2]

$$\begin{aligned}
 S\phi = & \frac{(R+h)^2 \pi}{4\pi} \sum_{i=1}^N \sum_{p=1}^N \{ (\phi_1(R+h, t_i, \theta_p) \cos t_i + \phi_2(R+h, t_i, \theta_p) \sin t_i \cos \theta_p + \\
 & + \phi_3(R+h, t_i, \theta_p) \sin t_i \sin \theta_p) (\vec{i} g_1(t_i, \theta_p, t', \theta') + \vec{j} g_2(t_i, \theta_p, t', \theta') + \vec{k} g_3(t_i, \theta_p, t', \theta')) + \\
 & + \vec{i} [(\phi_1(R+h, t_i, \theta_p) \sin t_i \sin \theta_p - \phi_3(R+h, t_i, \theta_p) \cos t_i) g_3(t_i, \theta_p, t', \theta') - \\
 & - (\phi_2(R+h, t_i, \theta_p) \cos t_i - \phi_1(R+h, t_i, \theta_p) \sin t_i \cos \theta_p) g_2(t_i, \theta_p, t', \theta')] + \\
 & + \vec{j} [(\phi_2(R+h, t_i, \theta_p) \cos t_i - \phi_1(R+h, t_i, \theta_p) \sin t_i \cos \theta_p) g_1(t_i, \theta_p, t', \theta') - \\
 & - (\phi_3(R+h, t_i, \theta_p) \sin t_i \cos \theta_p - \phi_2(R+h, t_i, \theta_p) \sin t_i \sin \theta_p) g_3(t_i, \theta_p, t', \theta')] + \\
 & + \vec{k} [(\phi_3(R+h, t_i, \theta_p) \sin t_i \cos \theta_p - \phi_2(R+h, t_i, \theta_p) \sin t_i \sin \theta_p) g_2(t_i, \theta_p, t', \theta') - \\
 & - (\phi_1(R+h, t_i, \theta_p) \sin t_i \sin \theta_p - \phi_3(R+h, t_i, \theta_p) \cos t_i) g_1(t_i, \theta_p, t', \theta')] \} \sin t_i. \quad (9)
 \end{aligned}$$

Перейдем к приближенному решению интегрального уравнения (1). Прделав несложные выкладки, получим, что наша задача сводится к решению следующей системы из трех интегральных уравнений

$$\begin{aligned}
 -\frac{(R+h)^2}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \{ \phi_1(R+h, t, \theta) + [g_1(t, \theta, t', \theta') \cos t + g_3(t, \theta, t', \theta') \sin t \sin \theta + \\
 + g_2(t, \theta, t', \theta') \sin t \cos \theta] + \phi_2(R+h, t, \theta) [g_1(t, \theta, t', \theta') \sin t \cos \theta - \\
 - g_2(t, \theta, t', \theta') \cos t] + \phi_3(R+h, t, \theta) [g_1(t, \theta, t', \theta') \sin t \sin \theta - \\
 - g_3(t, \theta, t', \theta') \cos t] \} \sin t dt d\theta = \phi_1(R, t', \theta'), \quad (10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{(R+h)^2}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \{ \phi_1(R+h, t, \theta) + [g_2(t, \theta, t', \theta') \cos t - g_1(t, \theta, t', \theta') \sin t \cos \theta] + \\
 + \phi_2(R+h, t, \theta) [g_2(t, \theta, t', \theta') \sin t \cos \theta + g_1(t, \theta, t', \theta') \cos t + \\
 + g_3(t, \theta, t', \theta') \sin t \sin \theta] + \phi_3(R+h, t, \theta) [g_2(t, \theta, t', \theta') \sin t \sin \theta - \\
 - g_3(t, \theta, t', \theta') \sin t \cos \theta] \} \sin t dt d\theta = \phi_2(R, t', \theta'), \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{(R+h)^2}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \{ \phi_1(R+h, t, \theta) + [g_3(t, \theta, t', \theta') \cos t - g_1(t, \theta, t', \theta') \sin t \sin \theta] + \\
 + \phi_2(R+h, t, \theta) [g_3(t, \theta, t', \theta') \sin t \cos \theta - g_2(t, \theta, t', \theta') \sin t \sin \theta] + \\
 + \phi_3(R+h, t, \theta) [g_3(t, \theta, t', \theta') \sin t \sin \theta + g_1(t, \theta, t', \theta') \cos t + \\
 + g_2(t, \theta, t', \theta') \sin t \cos \theta] \} \sin t dt d\theta = \phi_3(R, t', \theta'). \quad (12)
 \end{aligned}$$

Эту систему будем решать методом коллокации. За узлы коллокации возьмем узлы кубатурной формулы (8).

Тогда решение задачи сведется к решению следующей системы из $3n^2$ линейных алгебраических уравнений с $3n^2$ неизвестными

$$\begin{aligned}
& -\frac{(R+h)^2\pi}{2n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^n \{ \phi_1(R+h, t_i, \theta_p) + [g_1(t_i, \theta_p, t_l, \theta_m) \cos t_i + \\
& \quad + g_3(t_i, \theta_p, t_l, \theta_m) \sin t_i \sin \theta_p + \\
& \quad + g_2(t_i, \theta_p, t_l, \theta_m) \sin t_i \cos \theta_p] + \phi_2(R+h, t_i, \theta_p) [g_1(t_i, \theta_p, t_l, \theta_m) \sin t_i \cos \theta_p - \\
& \quad - g_2(t_i, \theta_p, t_l, \theta_m) \cos t_i] + \phi_3(R+h, t_i, \theta_p) [g_1(t_i, \theta_p, t_l, \theta_m) \sin t_i \sin \theta_p - \\
& \quad - g_3(t_i, \theta_p, t_l, \theta_m) \cos t_i] \} \sin t_i = \phi_1(R, t_l, \theta_m), \tag{13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{(R+h)^2\pi}{2n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^n \{ \phi_1(R+h, t_i, \theta_p) + [g_2(t_i, \theta_p, t_l, \theta_m) \cos t_i - \\
& \quad - g_1(t_i, \theta_p, t_l, \theta_m) \sin t_i \cos \theta_p] + \\
& \quad + \phi_2(R+h, t_i, \theta_p) [g_2(t_i, \theta_p, t_l, \theta_m) \sin t_i \cos \theta_p + g_1(t_i, \theta_p, t_l, \theta_m) \cos t_i + \\
& \quad + g_3(t_i, \theta_p, t_l, \theta_m) \sin t_i \sin \theta_p] + \phi_3(R+h, t_i, \theta_p) [g_2(t_i, \theta_p, t_l, \theta_m) \sin t_i \sin \theta_p - \\
& \quad - g_3(t_i, \theta_p, t_l, \theta_m) \sin t_i \cos \theta_p] \} \sin t_i = \phi_2(R, t_l, \theta_m), \tag{14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{(R+h)^2\pi}{2n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{p=1}^n \{ \phi_1(R+h, t_i, \theta_p) + [g_3(t_i, \theta_p, t_l, \theta_m) \cos t_i - \\
& \quad - g_1(t_i, \theta_p, t_l, \theta_m) \sin t_i \sin \theta_p] + \phi_2(R+h, t_i, \theta_p) [g_3(t_i, \theta_p, t_l, \theta_m) \sin t_i \cos \theta_p - \\
& \quad - g_2(t_i, \theta_p, t_l, \theta_m) \sin t_i \sin \theta_p] + \phi_3(R+h, t_i, \theta_p) [g_3(t_i, \theta_p, t_l, \theta_m) \sin t_i \sin \theta_p + \\
& \quad + g_1(t_i, \theta_p, t_l, \theta_m) \cos t_i + g_2(t_i, \theta_p, t_l, \theta_m) \sin t_i \cos \theta_p] \} \sin t_i = \\
& = \phi_3(R, t_l, \theta_m), \quad i, p, l, m = 1, \dots, n. \tag{15}
\end{aligned}$$

Запишем эту систему в матричной форме

$$Ax = b.$$

Будем решать эту систему следующим итерационным методом

$$x^{m+1} = \alpha_m x^m + (1 - \alpha_m)x^m - \gamma(\beta x^m + A^* Ax^m - A^* b). \tag{16}$$

Здесь m – номер итерации, $0 < \alpha < \alpha_m < 1 - \eta < 1$, A^* – матрица, сопряженная к A , а параметр

$$\gamma = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2\|A^* A\|} \right\}.$$

Сходимость этого метода обоснована в работе [5], где показано, что для его устойчивой сходимости достаточно условие $\|I - \gamma A^* A\| \leq 1$, что как нетрудно проверить, выполняется.

Список литературы

1. Бойков И. В., Кудряшова Н. Ю. Метод сингулярных интегральных уравнений в задачах аналитического продолжения в пространстве // Геофизика и математика : материалы 1-й Всерос. конф. М. : ОИФЗ, 1999. С. 21–24.
2. Бойков И. В., Кудряшова Н. Ю. Применение интегральных уравнений с интегралами типа Коши для продолжения потенциальных полей // Кубатурные формулы и их приложения : тез. докл. V Междунар. семинара-совещания. Красноярск : КГТУ, 1999. С. 5–6.
3. Жданов М. С. Аналоги интегралов типа Коши в теории геофизических полей. М. : Наука, 1984. 328 с.
4. Кудряшова Н. Ю., Купряшина Л. А. Об одном численном методе решения задачи аналитического продолжения на плоскости // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : сб. ст. по материалам XVII Всерос. с междунар. участием науч.-техн. конф. (г. Пенза, Россия, 28 ноября – 3 декабря 2022 г.) / под ред. д.ф.-м.н., проф. И. В. Бойкова. Пенза : Изд-во ПГУ, 2022. С. 140–144.
5. Обломская Л. Я. О методах последовательных приближений для линейных уравнений в банаховых пространствах // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1968. Т. 8, № 2. С. 417–426.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИИ MPI ПРИ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО НА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С ОБЩЕЙ ПАМЯТЬЮ

*Дмитрий Викторович Тарасов¹,
Вячеслав Владимирович Лапкин²*

^{1,2} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹ tarasovdv@mail.ru, ² lapkin2001@inbox.ru

Аннотация. Метод Монте-Карло основан на использовании случайных чисел и может быть задействован для вычисления интегралов в случаях, когда обычные аналитические подходы неэффективны или неприменимы. Рассматривается возможность использования технологии параллельного программирования в методе Монте-Карло на вычислительных системах с общей памятью.

Ключевые слова: MPI, параллельные вычисления, метод Монте-Карло

THE USE OF MPI TECHNOLOGY IN THE IMPLEMENTATION OF THE MONTE CARLO METHOD ON COMPUTING SYSTEMS WITH SHARED MEMORY

Dmitriy V. Tarasov¹, Vyacheslav V. Lapkin²

^{1,2} Penza State University, Penza, Russia

¹ tarasovdv@mail.ru, ² lapkin2001@inbox.ru

Abstract. The Monte Carlo method is based on the use of random numbers and can be used to calculate integrals in cases where conventional analytical approaches are ineffective or inapplicable. The paper considers the possibility of using parallel programming technology in the Monte Carlo method on computing systems with shared memory.

Keywords: MPI, parallel computing, Monte Carlo method

Введение

Метод Монте-Карло можно применять во многих областях, включая физику, экономику, финансы, биологию, машинное обучение и другие. Также его можно использовать для вычисления интегралов в случаях, когда обычные аналитические методы неэффективны или неприменимы, поскольку основан он на использовании случайных чисел и статистических методов.

Одной из наиболее распространенных областей применения метода Монте-Карло является финансовая математика. В этой области метод используется для оценки финансовых инструментов. Он позволяет учесть множество различных факторов, таких как волатильность цен, процентные ставки, дивиденды и другие факторы, влияющие на стоимость финансовых инструментов.

Для решения задач финансовой математики может понадобиться задействовать довольно большое количество ресурсов ЭВМ, что приведёт к увеличению времени выполнения программного кода. Чтобы изменить данную ситуацию можно воспользоваться методами параллельного программирования для вычислительных систем с распределённой памятью.

В вычислительных системах с распределённой памятью процессоры работают независимо друг от друга. Для организации параллельных вычислений в таких условиях необходимо иметь возможность распределять вычислительную нагрузку и организовать информационное взаимодействие (передачу данных) между процессорами.

В настоящее время существует много технологий которые позволяют наиболее легко организовать параллельные вычисления, пожалуй, самой популярной является технология MPI – программный интерфейс (API) для передачи информации, который позволяет обмениваться сообщениями между процессами, выполняющими одну задачу.

Стандартизацией MPI занимается MPI Forum. В стандарте MPI описан интерфейс передачи сообщений, который должен поддерживаться как на платформе, так и в приложениях пользователя. В настоящее время существует большое количество бесплатных и коммерческих реализаций MPI. Существуют реализации для языков Фортран 77/90, Java, Си и C++.

1. Интегрирование методом Монте-Карло

Предположим, требуется вычислить определённый интеграл

$$\int_a^b f(x)dx. \quad (1)$$

Рассмотрим случайную величину h , равномерно распределённую на отрезке интегрирования $[a, b]$, плотность распределения которой имеет вид:

$$\varphi(x) = \frac{1}{b-a}.$$

Тогда $f(h)$ также будет случайной величиной, причём её математическое ожидание $M[f(h)]$ выражается как

$$M[f(h)] = \int_a^b f(x)\varphi(x)dx.$$

Таким образом, искомый интеграл (1) выражается как

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)M[f(h)], \quad (2)$$

но математическое ожидание случайной величины $f(h)$ можно легко оценить, смоделировав эту случайную величину и посчитав выборочное среднее.

Итак, бросаем n точек, равномерно распределённых на $[a, b]$, для каждой точки h_i вычисляем $f(h_i)$. Затем вычисляем выборочное сред-

нее: $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(h_i)$. В итоге получаем оценку интеграла [1]:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(h_i), \quad (3)$$

в которой точность зависит только от количества точек n .

Этот метод имеет и геометрическую интерпретацию. Он очень похож на описанный выше детерминистический метод, с той разницей, что вместо равномерного деления области интегрирования на маленькие интервалы и суммирования площадей получившихся «столбиков» мы забрасываем область интегрирования случайными точками, на каждой из которых строим такой же «столбик», определяя его ширину как $(b-a)/n$, и суммируем их площади.

2. MPI

MPI-программа – это множество параллельных взаимодействующих процессов, которые работают каждый в своей выделенной области памяти. По сути, это n независимых программ, которые общаются между собой в ходе работы. В MPI большинство типов данных уже переопределены и начинаются с аббревиатуры MPI_[Name], далее это будет понятно.

Для понимания того, что происходит дальше нужно определить-ся с несколькими терминами:

Коммуникатор – объект, через который общается определенная группа порожденных процессов. В языке C/C++ – это тип данных MPI_Comm. Коммуникатор может объединять несколько процессов путем передачи сообщений между ними, при этом коммуникаторов может быть несколько, группы, которые они образуют могут как не пересекаться, так пересекаться частично. При старте программы все процессы работают под единым коммуникатором с именем MPI_COMM_WORLD.

Кроме него существуют еще коммуникаторы MPI_COMM_SELF, MPI_COMM_NULL, которые содержат только текущий процесс и ни одного процесса соответственно.

Сообщение – набор данных некоторого типа, который передается при коммуникации процессов. Каждое сообщение имеет несколько атрибутов, в частности номер процесса-отправителя, получателя, идентификатор сообщения, коммуникатор и тег.

Тег сообщения – целое не отрицательное число от 0 до 32767 (В зависимости от реализации. Максимально возможная величина тега хранится в константе `MPI_TAG_UB`).

Рассмотрим случай программной реализации (рис. 1), когда вычисление интегралов ведется по формуле (3).

```
MPI_Init(argc, &argv);
MPI_Comm_rank(MPI_COMM_WORLD, &procid);
MPI_Comm_size(MPI_COMM_WORLD, &numprocs);
unsigned int partition = number_of_random / numprocs;
for (int i = procid * partition; i <= procid *
partition + partition; i++)
{
    x = 2.0 * rand() / RAND_MAX - 1.0; //генерируем x
    в интервале [-1,1]
    s += func(x);
}
MPI_Finalize();
s = s / (double)number_of_random * (point_b -
point_a);
cout << "integral: " << s << endl;
```

Рис. 1. Формула Монте-Карло для вычисления интегралов при параллельной реализации с технологией MPI

Заметим, что:

1) первой вызываемой функцией MPI должна быть функция:

*MPI_Init(*argc, char **argv);*

для инициализации среды выполнения MPI-программы. Параметрами функции являются количество аргументов в командной строке и тест самой командной строки.

2) функция *rand()* может генерировать числа неравномерно (это зависит от диапазона и значения `RAND_MAX`), но в данной программе функция генерирует значения равномерно.

3) последней вызываемой функцией MPI обязательно должна являться функция: *MPI_Finalize(void);*

4) функция *MPI_Comm_size (MPI_Comm comm, int * size)* отвечает за определение количества процессов в выполняемой параллельной программе [2];

5) функция *MPI_Comm_rank (MPI_Comm comm, int * rank)* отвечает за определение ранга процесса в выполняемой параллельной программе.

Как результат, можно отметить, что структура параллельной программы, разработанная с использованием MPI, должна иметь вид как на рис. 2.

```

#include "mpi.h"
int main(int *argc, char ** argv)
{
    //программный код без использования MPI функций
    MPI_Init(argc, &argv);
    //программный код с использованием MPI функций
    MPI_Finalize();
    //программный код без использования MPI функций
    return 0;
}

```

Рис. 2. Структура параллельной программы созданной с использованием технологии MPI

Таким образом, разделяя программу с помощью MPI, на отдельные блоки, можно выполнить их параллельно на разных узлах. Благодаря этому, MPI позволяет распределить нагрузку на вычисления между несколькими процессами, что приводит к ускорению выполнения программы.

Список литературы

1. Соболев И. М. Численные методы Монте-Карло. М. : Наука, 1973. 312 с.
2. Немнюгин С., Стесик О. Параллельное программирование для многопроцессорных вычислительных систем. СПб. : БХВ-Петербург, 2002. 396 с.

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ, СОДЕРЖАЩИЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИЙ И ПРОИЗВОДНЫХ

*Шалва Соломонович Хубежты¹,
Любовь Юрьевна Плиева²*

¹ Северо-Осетинский государственный университет имени К. Л. Хетагурова,
Владикавказ, Россия

² Южный математический институт – филиал Владикавказского
научного центра РАН, Владикавказ, Россия

¹ shalva57@rambler.ru, ² plieva-21@mail.ru

Аннотация. Строятся квадратурные формулы для сингулярных интегралов на отрезке интегрирования $[-1, 1]$ с весовой функцией $p(t) = \sqrt{1 - t^2}$. При построении используются значения функции и ее производных в нулях многочлена Чебышева второго рода. Полученные формулы являются квадратурными формулами интерполяционного типа и имеют алгебраическую степень точности $2m - 1$. Оценка погрешности приводится.

Ключевые слова: квадратурная формула, узлы, производная функции, остаточный член

QUADRATURE FORMULAS FOR SINGULAR INTEGRALS CONTAINING THE VALUES OF FUNCTIONS AND DERIVATIVES

Shalva S. Khubezhty¹, Lyubov Yu. Plieva²

¹ North Ossetian State University named after K. L. Khetagurov,
Vladikavkaz, Russia

² Southern Mathematical Institute – Branch
of Vladikavraz Scientific Center of RAS,
Vladikavkaz, Russia

¹ shalva57@rambler.ru, ² plieva-21@mail.ru

Abstract. Quadrature formulas are constructed for singular integrals on the integration segment $[-1, 1]$, with a weight function $p(t) = \sqrt{1 - t^2}$. The values of the function and its derivatives in zeros of the Chebyshev polynomial of the second kind are used in the construction. The resulting formulas are quadrature formulas of interpolation type and have an algebraic degree of accuracy of $2m - 1$. The error estimate is given.

Keywords: quadrature formula, nodes, derivative of function, remainder term

В некоторых задачах численного решения сингулярных интегральных уравнений требуется не только нахождения значений функции, но и ее производных. Тогда естественно требуется использовать квадратурные формулы содержащие значения функции $\varphi(x)$ и ее производных в точках x_1, x_2, \dots, x_n , что позволяет увеличить точность интегрирования.

Такие квадратурные формулы нами были построены для сингулярных интегралов вида [1]

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi(t)}{t-x} dt, x \in (-1,1). \quad (1)$$

В данной работе рассматриваются интегралы вида

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{\varphi(t)}{t-x} dt, x \in (-1,1). \quad (2)$$

Мы будем строить формулы интерполяционного типа и использовать для этого интерполяционный многочлен Эрмита, который имеет вид [2]:

$$P(x) = \sum_{i=1}^m \frac{\omega^2(x)}{\omega'^2(x_i)(x-x_i)^2} \left[\varphi(x_i) \left(1 - \frac{\omega''(x_i)}{\omega'(x_i)}(x-x_i) \right)^2 + \right. \\ \left. + \varphi'(x_i)(x-x_i) \right], \quad (3)$$

где $\omega(x) = \prod_{i=1}^m (x-x_i)$, $\omega'(x_i) = \sum_{l=1}^m \prod_{k=1, k \neq l}^m (x_i - x_k)$,
 $\omega''(x_i) = \sum_{l=1, l \neq i}^m \sum_{k=1, k \neq i}^m \prod_{j=1, j \neq i, k}^m (x_i - x_j)$.

Остаток выражается формулой

$$R_m(\varphi, x) = \frac{\varphi^{(2m)}(\xi)}{(2m)!} \omega^2(x). \quad (4)$$

Подставляя (3) в (2) получим

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{\varphi(t)}{t-x} dt \approx \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x} \left\{ \sum_{i=1}^m \left(\frac{\omega(t)}{\omega'(x_i)(t-x_i)} \right)^2 * \right. \\ \left. * \varphi(x_i) \left(1 - \frac{\omega''(x_i)}{\omega'(x_i)}(t-x_i) \right) + \varphi'(x_i)(t-x_i) \right\} dt = \\ = \sum_{i=1}^m (A_i(x)\varphi(x_i) + B_i(x)\varphi'(x_i)), \quad (5)$$

где

$$A_i(x) = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x} \left(\frac{\omega(t)}{\omega'(x_i)(t-x_i)} \right)^2 \left(1 - \frac{\omega''(x_i)}{\omega'(x_i)}(t-x_i) \right) dt, \quad (6)$$

$$B_i(x) = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x} \left(\frac{\omega(t)}{\omega'(x_i)(t-x_i)} \right)^2 (t-x_i) dt. \quad (7)$$

$(i = 1, 2, \dots, m).$

Как известно ортогональными многочленами по весу $\sqrt{1-x^2}$ на отрезке $[-1, 1]$ являются многочлены Чебышева 2-го рода $U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Исходя из этого в качестве $\omega(t)$ будем брать многочлен $\omega(t) = \frac{1}{2^m} U_m(t)$, а узлы x_i будут корнями этого многочлена $x_i = \cos \frac{\pi i}{n+1}, i = 1, 2, \dots, m$. Тогда остается вычислить коэффициенты квадратурной формулы (5).

$$\begin{aligned} B_i(x) &= \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{1}{t-x} \frac{U_m^2(t)}{U_m'(x_i)(t-x_i)} dt = \\ &= \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_m^2(t)}{U_m'(x_i)(x-x_i)} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t-x_i} \right) dt = \\ &= \frac{1}{U_m'(x_i)(x-x_i)} \left(\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_m^2(t)}{t-x} dt - \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_m^2(t)}{t-x_i} dt \right) = \\ &= \frac{1}{U_m'(x_i)(x-x_i)} \left(\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_m(t) - U_m(x) + U_m(x)}{t-x} U_m(t) dt - \right. \\ &\quad \left. - \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_m(t) - U_m(x_i)}{t-x_i} U_m(t) dt \right). \end{aligned}$$

Используя известные формулы [3, 4]

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_m(t) - U_m(x)}{t-x} U_m(t) dt &= 0, \quad \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_m(t)}{t-x} dt = \\ &= -\pi T_{m+1}(x), \end{aligned} \quad (8)$$

где $T_{m+1}(x) = \cos((m+1)\arccos x)$ – многочлен Чебышева 1-го рода, окончательно получим

$$B_i(x) = -\frac{\pi U_m(x) T_{m+1}(x)}{U_m'(x_i)(x-x_i)}. \quad (9)$$

Перейдем к вычислению коэффициентов $A_i(x) (i = 1, 2, \dots, m)$.

$$\begin{aligned} A_i(x) &= \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{1}{t-x} \left(\frac{\omega(t)}{\omega'(x_i)(t-x_i)} \right)^2 \left(1 - \frac{\omega''(x_i)}{\omega'(x_i)} (t-x_i) \right) dt = \\ &= \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{1}{t-x} \left(\frac{\omega(t)}{\omega'(x_i)(t-x_i)} \right)^2 dt - \\ &\quad - \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{1}{t-x} \frac{\omega''(x_i)}{\omega'(x_i)} \left(\frac{\omega(t)}{\omega'(x_i)(t-x_i)} \right)^2 (t-x_i) dt. \end{aligned}$$

Подставляя $\omega(t) = \frac{1}{2^m} U_m(t)$, получим

$$A_i(x) = \frac{1}{U_m'^2(x_i)} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_m^2(t)}{(t-x)(t-x_i)} dt - \frac{U_m''(x_i)}{U_m'(x_i)} * \\ * \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_m^2(t)}{(t-x)(t-x_i)} dt = \frac{1}{U_m'^2(x_i)} * \\ * \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_m(t) - U_m(x_i)}{(t-x)(t-x_i)} U_m(t) dt - \frac{U_m''(x_i)}{U_m'(x_i)} B_i(x).$$

Используя формулу (8) окончательно получим

$$A_i(x) = \frac{\left(-U_m'(x)T_{m+1}(x) + U_m(x_i)T_{m+1}(x_i) - \frac{U_m''(x_i)}{U_m'(x_i)} B_i(x)\right)}{U_m'^2(x_i)(x-x_i)} \pi, \quad (10)$$

В итоге мы получим следующую квадратурную формулу

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{\varphi(t)}{t-x} dt \approx \sum_{i=1}^m \frac{\pi}{U_m'^2(x_i)(x-x_i)} * \\ * \left\{ \left[-U_m'(x)T_{m+1}(x) + U_m'(x_i)T_{m+1}(x_i) + \frac{U_m''(x_i)}{U_m'(x_i)} U_m(x)T_{m+1}(x) \right] \varphi(x_i) - \right. \\ \left. - U_m(x)T_{m+1}(x)\varphi'(x_i) \right\}. \quad (11)$$

Остаточный член будет иметь вид:

$$R_m(\varphi, x) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{\varphi^{(2m)}(\xi)}{t-x} \frac{U_m^2(t)}{2^{2m}(2m)!} dt. \quad (12)$$

Список литературы

1. Хубежты Ш. С., Плиева Л. Ю. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов, содержащих значения функции и ее производных // Математическое моделирование естественно-научных и социальных проблем : материалы XVII Всерос. с междунар. участием науч.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов (г. Пенза, Россия, 2023 г.). Пенза : Изд-во ПГУ, 2023. С. 135–139.
2. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функции. М. ; Л : РТТН, 1954. 328 с.
3. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. М. : Наука, 1967. 500 с.
4. Хубежты Ш. С. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов и некоторые их применения. Владикавказ : ЮМИ ВНИЦ РАН, 2011. 235 с.

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ НА НЕОДНОРОДНОМ ШАРЕ, ПОКРЫТОМ СЛОЕМ МАТЕРИАЛА СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ

Олег Сергеевич Скворцов

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
ghj.ghh.13@mail.ru

Аннотация. Рассматривается трехмерная, скалярная задача дифракции на шаре, покрытом слоем материала со специальными условиями.

Ключевые слова: трехмерная задача, скалярная задача, задача дифракции, тело, система уравнений Максвелла, метод Галеркина, метод Гаусса, графен, кубическая сетка

NUMERICAL METHOD FOR SOLVING THE DIFFRACTION PROBLEM ON AN INHOMOGENEOUS BALL COVERED WITH A LAYER OF MATERIAL WITH SPECIAL COUPLING CONDITIONS

Oleg S. Skvortsov

Penza State University, Penza, Russia
ghj.ghh.13@mail.ru

Abstract. A three-dimensional, scalar diffraction problem on a ball covered with a layer of material with special conditions is considered.

Keywords: three-dimensional problem, scalar problem, diffraction problem, body, Maxwell equation system, Galerkin method, Gauss method, graphene, cubic grid

Введение

В работе описан численный метод и параллельный алгоритм решения скалярной задачи рассеяния монохроматической акустической волны препятствием, состоящим из объемного тела, покрытого слоем типа графена.

Теоретическому исследованию этой задачи посвящены [1–2]. Однако до настоящего времени не был рассмотрен численный метод этой задачи. Основной трудностью здесь является определение базисных функций и их носителей только во внутренней области шарообразного тела. Нетривиальны определение и вычисление матричных элементов в методе Галеркина, отвечающих случаю, когда базисные

и/или тестовые функции имеют носители, частично лежащие в области неоднородности.

Высокая трудоемкость метода Галеркина, необходимость вычисления большого числа многомерных интегралов с высокой точностью требуют разработки параллельного алгоритма для решения задачи дифракции. Еще одна трудность связана с возможной неравномерностью нагрузки процессов на этапе заполнения матрицы системы алгебраических уравнений (СЛАУ): это обусловлено определением носителей базисных и/или тестовых функций.

1. Постановка задачи

Рассмотрим в пространстве \mathbb{R}^3 задачу рассеяния акустических волн объёмным телом Q со специальными условиями сопряжения [1].

Если тело является неоднородным, то решение задачи сводится [2] к интегральному уравнению (1).

$$u(x) - \int_Q G(x, y)(k^2(y) - k_0^2)u(y)dV_y + \hat{\gamma} \int_{\partial Q} G(x, y)u(y)dS_y = u_0(x), \quad (1)$$

где u – полное поле, $u_0 = e^{ik_0 x_1}$ – падающая волна, ∂Q – поверхность тела Q .

2. Дискретизация задачи

При решении задачи методом Галеркина необходимо построить равномерную расчётную сетку и набор конечных прямоугольных элементов внутри и на поверхности области $Q \subset [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$. Также введём трёхиндексную нумерацию $j = (j_1, j_2, j_3)$, тогда конечные элементы представляют собой набор параллелепипедов согласно формуле:

$$D_{j_1, j_2, j_3} = [x_{1, j_1}; x_{1, j_1+1}] \times [x_{2, j_2}; x_{2, j_2+1}] \times [x_{3, j_3}; x_{3, j_3+1}], \quad (2)$$

где $(j_1 = \overline{0, n-1}, j_2 = \overline{0, n-1}, j_3 = \overline{0, n-1})$, $x_{k, j_k} = a_k + j_k h_k$, $h_k = \frac{b_k - a_k}{n}$.

Определим финитные кусочно-постоянные функции согласно формуле:

$$\mu_{j_1, j_2, j_3}(x) = \begin{cases} 1, & x \in D_{j_1, j_2, j_3}, \\ 0, & x \notin D_{j_1, j_2, j_3}. \end{cases} \quad (3)$$

Метод Галёркина для решения уравнения (1) приводит к СЛАУ вида:

$$[A] \bar{x} = \bar{b},$$

где

$$a_{ij} = \int_{Q_{i_1, i_2, i_3}} \mu_{i_1, i_2, i_3}(x) dV_x - \int_{Q_{i_1, i_2, i_3}} \int_{Q_{j_1, j_2, j_3}} G(x, y) (k^{(2)} - k_0^2) \mu_{j_1, j_2, j_3}(y) \mu_{i_1, i_2, i_3}(x) dV_y dV_x +$$

$$+ \hat{\gamma} \int_{Q_{i_1, i_2, i_3}} \int_{\partial Q_{j_1, j_2, j_3}} G(x, y) \mu_{j_1, j_2, j_3}(y) \mu_{i_1, i_2, i_3}(x) dS_y dS_x, \quad (4)$$

$$b_i = \int_{Q_{i_1, i_2, i_3}} u_0(x) dV_x$$

где под $\partial Q_{j_1, j_2, j_3}$ будем понимать прямоугольный носитель имеющий не пустое пересечение с ∂Q .

Шестимерный, пятимерный и два трёхмерных интеграла вычислим приближённо по формуле центральных прямоугольников с обходом особых точек.

3. Параллельный алгоритм

Для поиска решения поставленной задачи за приемлемое время с приемлемой точностью разработан параллельный алгоритм с использованием библиотеки msmpi.

Хранить элементы матрицы будем ленточном виде (рис. 1). Хранятся только те элементы, для которых выполняется следующее условие:

$$\partial Q_{j_1, j_2, j_3} \cap Q \neq \emptyset. \quad (5)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Рис. 1. Схематичное распределение строк матрицы по процессам.

Строки матрицы расположены по процессам равномерно, тогда время заполнения матрицы на различных процессах будет примерно одинаковым (табл. 1).

Таблица 1

Время заполнения матрицы на различных процессах (с)

rank	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
time	14.99	15.11	14.72	14.55	15.12	15.17	15.01	14.99	14.72	14.81

Заметим, что решение задачи на одном процессе занимает 60 с.

3. Численные результаты

Рассмотрим полученные результаты при $k_0 = 8$, $k(y) = 1.5 \cdot k_0$, $R = 1$ – радиус шарообразного тела Q .

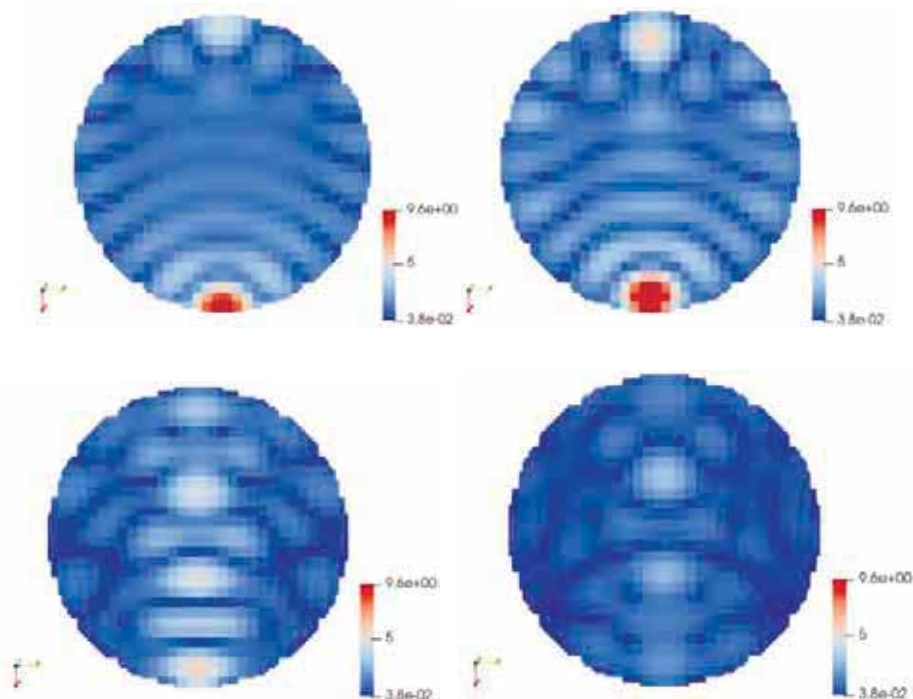


Рис. 2. Полное поле u в разрезе шара Q . $u_0 = e^{ik_0 x_1}$.
 $\hat{\gamma} = 0, 20, 40, 80$ соответственно

На рисунке 3 видим, что при увеличении количества разбиений сетки увеличивается точность приближённого решения.

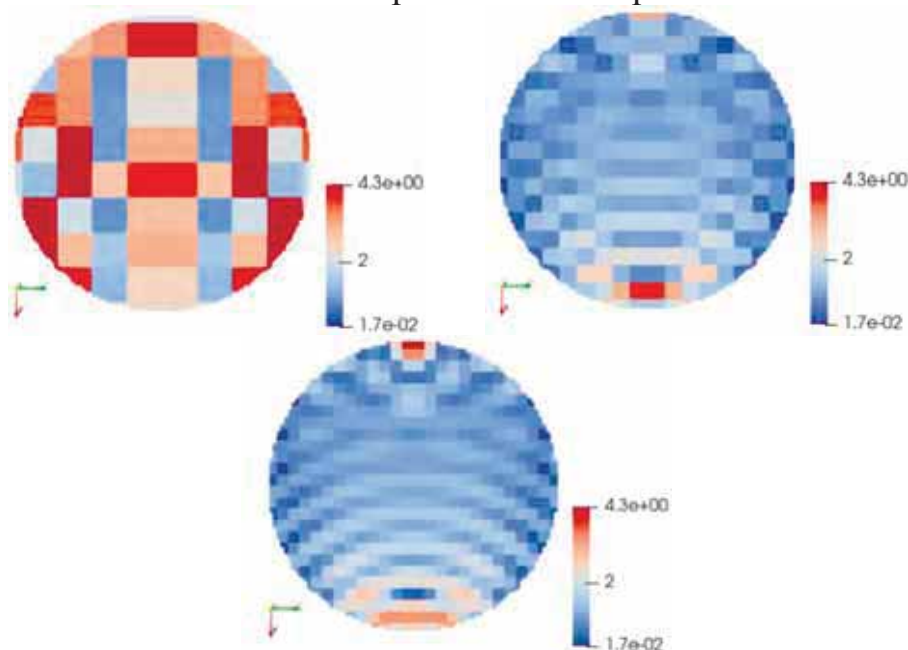


Рис. 3. внутренняя сходимость приближённого решения
 в разрезе шара Q . $u_0 = e^{ik_0 x_1}$. $n = 10, 20, 30$ соответственно

Заключение

В данной работе предложен численный метод решения скалярной трёхмерной задачи дифракции на теле покрытом слоем типа графена методом Галёркина. Предложена параллельная реализация метода Галёркина, показана её эффективность. Показана зависимость полного поля от $\hat{\gamma}$. А так же внутренняя сходимость приближённого решения.

Список литературы

1. Смирнов Ю. Г., Кондырев О. В. О фредгольмовости и разрешимости системы интегральных уравнений в задаче сопряжения для уравнений Гельмгольца // Дифференциальные уравнения. 2023. Т. 90, № 8. С. 1089–1097
2. Цупак А. А. О разрешимости скалярной задачи дифракции монохроматической волны на неоднородном теле со специальными условиями сопряжения // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2023. № 4.

ОПТИМИЗАЦИЯ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ СХЕМЫ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ГРАВИМЕТРИИ В КЛАССЕ СТРУКТУРНЫХ ГРАНИЦ

Александр Григорьевич Цидеев

Институт геофизики имени Ю. П. Булашевича Уральского отделения РАН,
Екатеринбург, Россия
achm2013@tsidaev.ru

Аннотация. Для задачи о вычислении гравитационного поля, порождаемого криволинейной границей, разделяющей слои с постоянной плотностью, рассматривается возможность замены гравитационного эффекта элементарных призм, выступающих в качестве элементов разбиения плотностного объема, гравитационным эффектом точечных источников с той же массой. Показано, что в случае сеток большой размерности подобная замена оправдана и позволяет значительно уменьшить время вычислений при допустимом росте погрешности.

Ключевые слова: метод конечных элементов, гравитационное моделирование, плотностной контакт

Финансирование: работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-17-00058).

OPTIMIZATION OF THE FINITE ELEMENT SCHEME FOR GRAVITY FIELD CALCULATION IN A CLASS OF STRUCTURAL BOUNDARIES

Alexander G. Tsidaev

Bulashevich Institute of Geophysics Ural branch of RAS,
Ekaterinburg, Russia
achm2013@tsidaev.ru

Abstract. For the gravity field calculation in a class of contact surfaces the replacement of FEM elements with point mass sources is considered. It is shown that for the large grids such a replacement allows one to reduce the computation time significantly while keeping the error acceptable.

Keywords: finite elements method, gravity modeling, density contact

Financing: the Russian Science Foundation (Grant № 20-17-00058) is acknowledged for supporting this research.

Рассмотрим поверхность $z = z(x, y)$, разделяющую два слоя в земной коре с постоянными плотностями σ_1 (выше поверхности раздела) и σ_2 (ниже поверхности), и имеющую горизонтальную асимптоту $z = H$ (рис. 1).

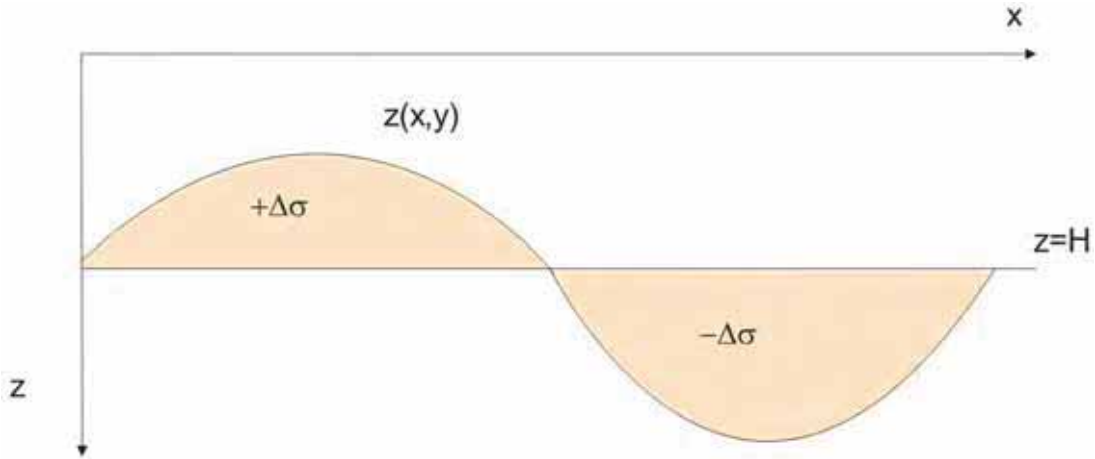


Рис. 1. Граница, разделяющая слои с постоянной плотностью $z(x, y)$

Гравитационный эффект Δg такой границы, то есть вклад в аномальное гравитационное поле, порожденный вносимой границей неоднородностью распределения плотности, выражается как [1]

$$\Delta g(x', y') = \Delta \sigma f \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2(x, y)}} - \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + H^2}} \right) dx dy. \quad (1)$$

Здесь (x', y') – координаты точки наблюдения на земной поверхности, $\Delta \sigma = \sigma_2 - \sigma_1$ – скачок плотности на границе, f – гравитационная постоянная.

Прямой счет по формуле (1) в ряде случаев затруднен, так как для приповерхностных аномалий знаменатель может обращаться в ноль или приближаться к нему. Для обхода этого ограничения предложено [2] использовать метод конечных элементов. Исследуемый объем разбивается на элементарные призмы, гравитационный эффект каждой из которых рассчитывается по формуле

$$S_{ij}(z_2, z_1) = -(\eta - y') \cdot \ln(|\xi - x'| + R) - (\xi - x') \cdot \ln(|\eta - y'| + R) + \zeta \cdot \arctg \left(\frac{(\xi - x') \cdot (\eta - y')}{\zeta \cdot R} \right) \bigg|_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \bigg|_{\eta_i}^{\eta_{i+1}} \bigg|_{z_1}^{z_2}. \quad (2)$$

Такой подход позволяет решать задачу в классе произвольных структурных границ, в том числе не имеющих асимптоты (в роли таковой выступает средняя глубина залегания границы).

Конечно-элементный подход позволяет эффективно распараллеливать вычисление на суперкомпьютерных кластерах, что позволяет решать прямую задачу на больших сетках. Также, распараллеливание позволяет использовать итеративные, основанные на многократном решении прямой задачи, методы решения обратных задач для восстановления положения границы по известному наблюдаемому полю. Однако, с ростом размерности сетки разбиения $n \times n$ время, затрачиваемое на решение прямой задачи, растет как $O(n^4)$. И если для сетки 256x256 требовалось 5 секунд [3], то уже для сетки 1024x1024 потребуется 21 минута. Таким образом, осложняется как прямой расчет модельного гравитационного поля, так и решение обратной задачи.

В связи с этим стали актуальны способы оптимизации вычислений по формуле (2). Известен подход [4], при котором элементы разбиения, расположенные на удалении от точки наблюдения, заменяются точечными источниками. Поле точечного источника рассчитывается по формуле не требующей «тяжелых» вычислений.

$$\Delta g_{ij}(x', y') = \frac{m \cdot \zeta}{R^3}, \quad (3)$$

Здесь m – масса; ζ – глубина, на которой расположен источник; R – расстояние от точки наблюдения до источника.

Точечный источник размещается в центре замещаемой им призмы, ему приписывается масса, равная массе призмы. Однако, описанное исследование выполнено для разбиения на призмы равного геометрического размера. В нашем же случае высота каждой призмы зависит от значения $z = (x, y)$.

Проведем тест для проверки применимости подхода из [4] в нашем случае. Сгенерируем случайным образом 100000000 призм с координатами $0 < x < 1500$ км и $0 < y < 1500$ км. Размер основания каждой призмы 1 км \times 1 км, высота выбирается случайным образом $0 \leq z_1 < z_2 \leq 80$ (z_1 – высота верхней грани, z_2 – нижней). Для каждой призмы рассчитаем положение и массу соответствующего ей точечного источника. Гравитационные эффекты призмы и точечного источника будем вычислять в точке с координатами (0,0,0).

На рис. 2 представлен результат такого моделирования. Для получения относительно гладкой кривой приведен 90-й перцентиль результата. В целом, негладкость графика может быть объяснена тем, что на расстояние влияет как положение источника, так и его размеры, в то

время как характер зависимости гравитационного поля от этих параметров разный – см. формулу (2).

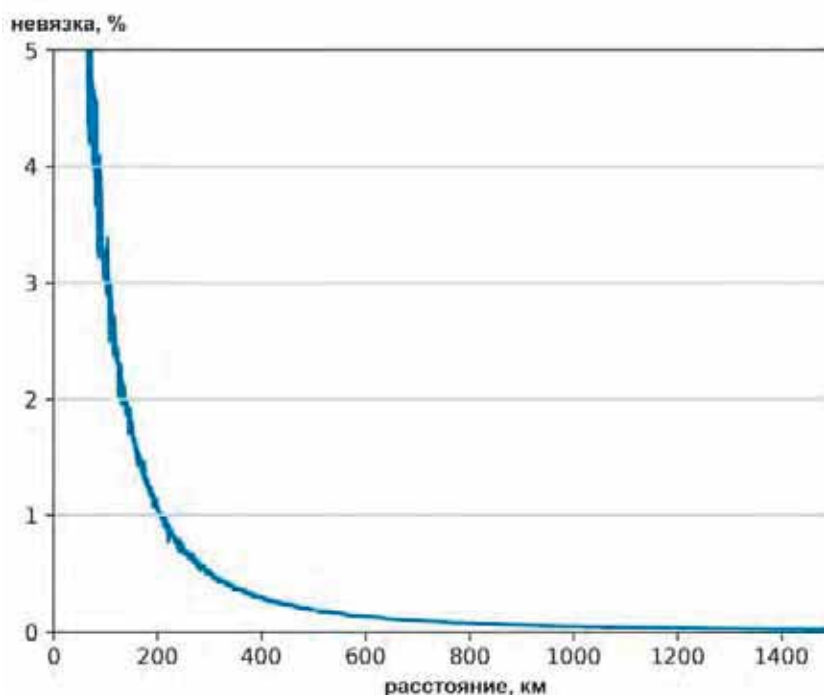


Рис. 2. График изменения невязки между гравитационным эффектом призмы и его приближением при помощи точечного источника с расстоянием

Как видим, уже элементы, удаленные от точки наблюдения на 200 км, можно заменить на точечные источники, получив погрешность результата порядка 1 %. Например, при расчете гравитационного поля для сетки 1024 км x 1024 км подобная замена позволит избежать порядка 75 % вычислений по формуле (2), заменив их на вычисления по формуле (3). Таким образом, предложенная схема оптимизации позволяет значительно сократить время вычислений для сеток большой размерности.

Список литературы

1. Пруткин И. Л. О решении трехмерной обратной задачи гравиметрии в классе контактных поверхностей методом локальных поправок // Известия Академии наук СССР. Физика Земли. 1986. Т. 1. С. 67–77.
2. Мартышко П. С., Ладовский И. В., Цидаев А. Г. Построение региональных геофизических моделей на основе комплексной интерпретации гравитационных и сейсмических данных // Физика Земли. 2010. № 11. С. 23–35.
3. Tsidaev A. G. GPU optimized software for forward and inverse gravity problems solution for contact boundary between two layers // AIP Conference Proceedings. 2020. Vol. 2293. doi: 10.1063/5.0027740
4. Heck B., Seitz K. A comparison of the tesseroid, prism and point-mass approaches for mass reductions in gravity field modelling // J Geodesy. 2007. Vol. 81. С. 121–136. doi: 10.1007/s00190-006-0094-0

4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ФИЗИКЕ И ТЕХНОЛОГИЯХ

УДК 004.042

ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ОБРАБОТКА СООБЩЕНИЙ ИЗ МЕССЕНДЖЕРА С ПОМОЩЬЮ БАЛАНСИРОВЩИКА НАГРУЗКИ

*Евгений Сергеевич Калабкин¹,
Татьяна Фанадовна Мамедова²*

^{1,2} Национальный исследовательский Мордовский государственный
университет имени Н. П. Огарёва, Саранск, Россия

¹ e.kalabkin@gmail.com, ² mamedovatf@yandex.ru

Аннотация. Представлена разработка архитектуры системы, направленной на распределение задач по выгрузке сообщений из приложения-мессенджера во внешнюю систему для достижения параллельного исполнения. Процесс исследования включал изучение паттернов реализации балансировщиков нагрузки и адаптацию наиболее подходящего из них под рамки задачи.

Ключевые слова: алгоритм, мессенджер, выгрузка, внешняя система, балансировщик нагрузки, параллельное исполнение

PARALLEL PROCESSING OF MESSENGER MESSAGES USING A LOAD BALANCER

Evgeniy S. Kalabkin¹, Tatiana F. Mamedova²,

^{1,2} National Research Mordovian State University
named after N. P. Ogarev, Saransk, Russia

¹ e.kalabkin@gmail.com, ² mamedovatf@yandex.ru

Abstract. This article presents the development of a system architecture aimed at distributing tasks for uploading messages from a messenger application to an external system to achieve parallel execution. The research process included studying the implementation patterns of load balancers and adapting the most suitable one to the scope of the task.

Keywords: algorithm, messenger, uploading, external system, load balancer, parallel execution

Введение

Использование балансировщика нагрузки дает ряд преимуществ в области распределенных вычислений. Его внедрение желательно по нескольким причинам:

Повышенная нагрузка. По мере роста пользовательского трафика или требований к обработке данных система может достичь предела своей мощности. Горизонтальное добавление большего количества вычислительных узлов позволяет распределить рабочую нагрузку между несколькими серверами, предотвращая перегрузку и обеспечивая оптимальную производительность.

Избыточность и высокая доступность. Горизонтальное масштабирование может повысить надежность системы. Развернув несколько экземпляров службы, в случае сбоя одной машины рабочую нагрузку можно переложить на другие, что сводит к минимуму время простоя и обеспечивает высокую доступность.

Балансировка нагрузки. Балансировщики нагрузки распределяют входящий сетевой трафик между несколькими серверами или их логическими экземплярами. Горизонтальное масштабирование работает в сочетании с балансировкой нагрузки для равномерного распределения работы, предотвращения узких мест и оптимизации использования ресурсов.

Экономическая эффективность. В некоторых случаях может быть более рентабельно добавить стандартное оборудование меньшего размера для горизонтального масштабирования, чем переход на более крупные и дорогие машины. Это особенно актуально в средах облачных вычислений.

Простое масштабирование. Горизонтальное масштабирование часто проще реализовать и управлять им, чем вертикальное масштабирование (масштабирование), которое предполагает обновление отдельных ресурсов сервера. Есть возможность добавлять или удалять узлы по мере необходимости, обеспечивая динамическое масштабирование по требованию.

Оптимизация производительности. Некоторые задачи могут выиграть от параллельной обработки. Горизонтальное масштабирование позволяет разделить рабочую нагрузку на более мелкие задачи, которые можно выполнять одновременно на нескольких машинах, что потенциально сокращает время обработки.

Изоляция неисправностей. Разделив систему на более мелкие изолированные компоненты, можно локализовать проблемы в определенных частях системы. Это упростит отладку и устранение неполадок, поскольку проблемы в одном компоненте не обязательно влияют на всю систему.

Масштабируемость по требованию. Горизонтальное масштабирование позволяет быстро реагировать на изменения в структуре трафика или требованиях к рабочей нагрузке. Можно увеличивать масштаб в периоды пиковой нагрузки и уменьшать масштаб в периоды низкой нагрузки, чтобы оптимизировать использование ресурсов и затраты.

Будущий рост. Горизонтальное масштабирование обеспечивает масштабируемую основу для будущего роста. По мере расширения системы можно продолжать добавлять больше серверов для удовлетворения растущих потребностей.

Основная часть

Рассмотрим основные составные части балансировщика нагрузки.

Очередь задач (или Task Queue) – это фундаментальный компонент архитектуры балансировщика нагрузки. Он отвечает за хранение набора задач и их передачу дальнейшему обработчику. Соответственно сами задачи могут быть расставлены в порядке приоритета. Сам приоритет может быть выставлен на основе различных факторов, таких как: критичность, потенциальная временная сложность задачи или SLA (Соглашение об уровне обслуживания).

Алгоритм распределения нагрузки (или Load Distribution Algorithm) – это основной компонент, который в ходе своего исполнения принимает решение о том, какой вычислительный узел получит задачу из Task Queue. Далее будет произведен разбор основных видов LDA.

Round-Robin: Простейший алгоритм распределения задач – они добавляются по очереди в каждый из имеющихся узлов. Не учитывается нагрузка узлов и приоритет задач.

Weighted Round-Robin: Аналог предыдущего пункта за одним исключением – задачам добавляется вес. Поэтому сначала в каждый из узлов добавляются задачи с более высоким приоритетом. Не учитывается нагрузка узлов.

Least Connection: Отправляет задачи к узлам, у которых текущее число подключений минимально. Не учитывается приоритет задач.

Weighted Least Connection: Аналог предыдущего пункта за одним исключением – задачам добавляется вес. Т.е. выбирается задача с высшим приоритетом и отправляется в узел с меньшим числом подключений.

Dynamic Weight Adjustment: Выбирается сервер по принципу минимальной загруженности. Соответственно алгоритм дополнительно реализует мониторинг производительности узлов в реальном времени.

Основными кандидатами для рассматриваемого рода задач можно выделить: Weighted Least Connection, Weighted Round-Robin. Их отличительной чертой является предварительное указание приоритета для исполнения задачи.

На рис. 1 представлена общая схема взаимодействия балансировщика. В простейших случаях в качестве Task Queue может выступать отдельная БД или таблица. В нетривиальных случаях это может быть отдельный микросервис со своей логикой.

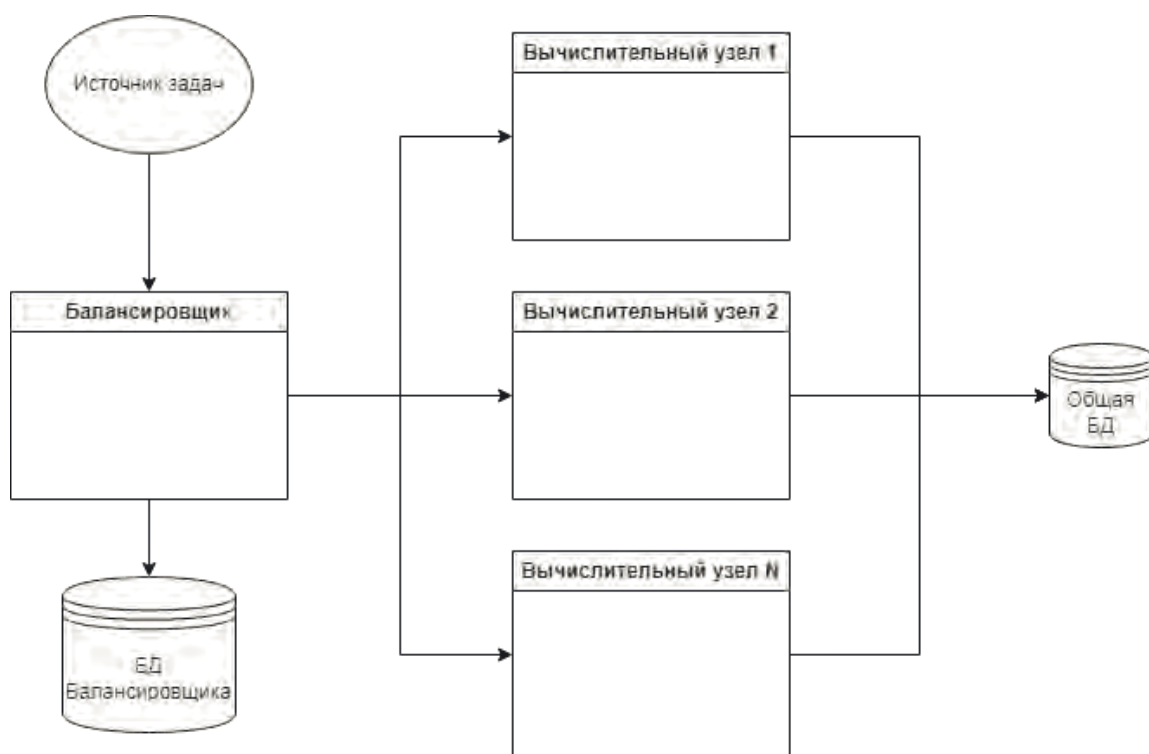


Рис. 1. Общий вид взаимодействия балансировщика нагрузки с вычислительными узлами

Так как алгоритм направлен на выгрузку сообщений из мессенджера, то их задачи можно поделить в общем смысле на два вида:

1. Разделение задачи выгрузки на подзадачи путем разбиения по диалогам.
2. Исполнение подзадачи определенного набора диалогов.

Соответственно, при проектировании, в простейшем случае, будет достаточно указывать высший приоритет задачам первого типа. Получается, что каждый вычислительный узел должен иметь возможность самому отправлять набор задач в Task Queue для их распределения балансировщиком.

Задачи второго типа должны будут снова попадать в Task Queue в распределенном виде. Вместе с этим необходимо предотвращать добавление в очередь задачи, у которой имеется незавершенный дубликат, к примеру: выгрузка выполняется периодически, старый набор задач не закончил работу, но пришло время повторной выгрузки сообщений.

Заключение

В заключение следует отметить, что, балансировщики нагрузки играют ключевую роль в оптимизации производительности, масштабируемости, доступности и безопасности распределенных вычислительных систем и веб-сервисов. Их архитектура, включающая основные компоненты, такие как Task Queue и LDA, гарантирует эффективное

управление и их распределение между несколькими вычислительными узлами.

Представленная архитектура позволит повысить эффективность сервиса, работающего с задачами по выгрузке сообщений из различного рода мессенджеров.

ЧИСЛЕННОЕ ОПИСАНИЕ ОТСУТСТВИЯ ВОЗМОЖНОСТИ У ФУНКЦИОНАЛОВ ХЁРСТА РАЗЛИЧАТЬ ПОЛОЖИТЕЛЬНО И ОТРИЦАТЕЛЬНО КОРРЕЛИРОВАННЫЕ БРОУНОВСКИЕ БЛУЖДЕНИЯ

*Александр Иванович Иванов¹,
Дмитрий Викторович Тарасов²*

¹ Пензенский научно-исследовательский
электротехнический институт, Пенза, Россия

² Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹ ivan@pniei.penza.ru, ² tarasovdv@mail.ru

Аннотация. В настоящее время показатель Хёрста достаточно легко интерпретируется применительно к биометрическим, медицинским и экономическим данным, однако его принято оценивать на больших выборках. Целью работы является демонстрация того, что только функционалов Хёрста недостаточно для различения данных с положительной и отрицательной коррелированностью броуновских блужданий. Используется моделирование двумерного броуновского движения, порождающее возможность вычисления эталонных показателей Хёрста. Смоделировано распределение независимых и положительно коррелированных данных. Продемонстрировано, что в рассмотренном случае показатель Хёрста всегда уменьшается в соответствии с уровнем корреляционной сцепленности независимо от знака коэффициентов корреляции. Предложено дополнить автокорреляционный функционал Хёрста обычным классическим корреляционным функционалом.

Ключевые слова: автокорреляционный функционал, показатель Хёрста, малые выборки, биометрические данные, восстановление ранее отброшенных данных

NUMERICAL DESCRIPTION OF THE ABSENCE OF THE POSSIBILITY FOR HURST FUNCTIONALS TO DISTINGUISH BETWEEN POSITIVELY AND NEGATIVELY CORRELATED BROWNIAN WALKS

Aleksandr I. Ivanov¹, Dmitriy V. Tarasov²

¹ Penza Scientific Research Electrotechnical Institute, Penza, Russia

² Penza State University, Penza, Russia

¹ ivan@pniei.penza.ru, ² tarasovdv@mail.ru

Abstract. Currently, the Hurst indicator is quite easily interpreted in relation to biometric, medical and economic data, but it is customary to evaluate it on large

samples. The aim of the work is to demonstrate that only Hurst functionals are not enough to distinguish between data with positive and negative correlation of Brownian walks. Modeling of two-dimensional Brownian motion is used, which generates the possibility of calculating Hurst reference indicators. The distribution of independent data and positively correlated data is modeled. It is shown that in the considered case, the Hurst index always decreases depending on the level of correlation coupling, regardless of the sign of the correlation coefficients. It is proposed to supplement the Hurst autocorrelation functional with the usual classical correlation functional.

Keywords: autocorrelation functional, Hurst index, small samples, biometric data, recovery of previously discarded data

Введение

Показатель Хёрста является одним из активно используемых параметров при анализе рынка [1, 2, 3] и коллективной биометрии [4]. К сожалению, эмпирический показатель Хёрста по умолчанию предполагает использование больших выборок из-за того, что он является степенным:

$$\frac{R(N)}{\sigma(N)} = \left\{ \frac{\pi \cdot N}{2} \right\}^H, \quad (1)$$

где N – размер выборки; R – размах выборки; σ – стандартное отклонение выборки; H – степенной показатель Хёрста, изменяющийся в интервале от 0,5 до 1,0 для предсказуемых персистентных систем и, изменяющийся в интервале от 0,0 до 0,5 для антиперсистентных систем.

Переходя в логарифмическую форму уравнения (1), получим еще один второй вариант записи показателя Хёрста:

$$H(N) = \frac{\log_2 \left(\frac{R(N)}{\sigma(N)} \right)}{\log_2(\pi \cdot N/2)}. \quad (2)$$

Вторая форма удобна для пояснения причин, по которым при анализе данных рынков и данных коллективной биометрии необходимы большие выборки. Если предположить, что логарифм нормированного размаха данных является константой, то ошибка оценки показателя будет оцениваться следующим соотношением:

$$\Delta H(N) \approx \frac{\text{const}}{\log_2(\pi \cdot N/2)}. \quad (3)$$

То есть ошибки из-за сокращения размеров выборки реальных данных должны расти обратно пропорционально логарифму объема выборки.

Проведенные численные эксперименты показали, что на ряду со случайной составляющей погрешности $\Delta H(N)$ оценки вида (2) содержат методическую составляющую погрешности, которая может

быть устранена. Одна из первых работ отмечающая наличие мультипликативной составляющей методической погрешности является работа Е. Федера [5] при слишком низких и слишком больших значениях показателя Хёрста. Одним из первых попытался устранить мультипликативную погрешность Э. Нейман [6]. Работ о том, насколько эффективен мультипликативный корректор Э. Неймана [6] нами не обнаружено. Это и послужило толчком к выполнению данной работы по корректировке методической погрешности, выявленной Е. Федером [5].

Численное моделирование значений показателя Хёрста для малых выборок на эталонных шумах броуновского движения

Теория броуновских блужданий [2, 3, 5] позволяет связать коэффициент парной корреляции со значениями показателя Хёрста. Примеры случайных броуновских блужданий, соответствующих разным значениям показателя Хёрста приведены на рис. 1.

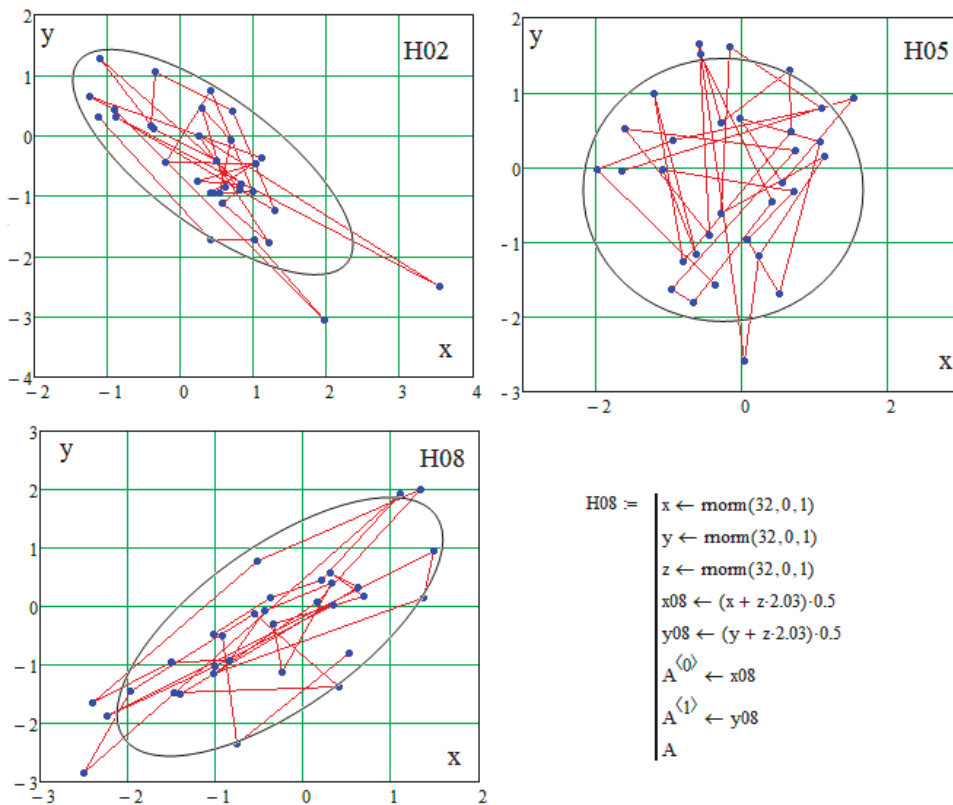


Рис. 1. Случайные броуновские блуждания, соответствующие разным значениям показателя Хёрста $H \approx 0,2$; $H \approx 0,5$; $H \approx 0,8$

Из теории следует, что при независимых данных, использованных для формирования броуновского блуждания, показатель Хёрста должен составляет значение $H \approx 0,5$ при $r(x, y) \approx 0,0$. В нашем случае для выборок объемом 32 опыта коэффициент парной корреляции должен вычисляться по следующей формуле:

$$r(x, y) = \frac{1}{32} \sum_{i=1}^{32} \frac{(x_i - E(x)) \cdot (y_i - E(y))}{\sigma(x) \cdot \sigma(y)}. \quad (4)$$

Кроме того, известно, что для $r(x, y) \approx -1,0$ показатель Хёрста должен составить минимальное значение $H \approx 0,0$. Напротив, для сильно коррелированных данных $r(x, y) \approx +1,0$ показатель должен принимать максимальное значение $H \approx 1,0$.

Моделирование предельных случаев минимального и максимального значения показателей Хёрста через использования программных генераторов псевдослучайных чисел невозможно. Однако возможно моделирование близких к предельным случайных блужданий для очень низких и очень больших значений показателей Хёрста. Возможность подобного моделирования иллюстрирует рис. 2.

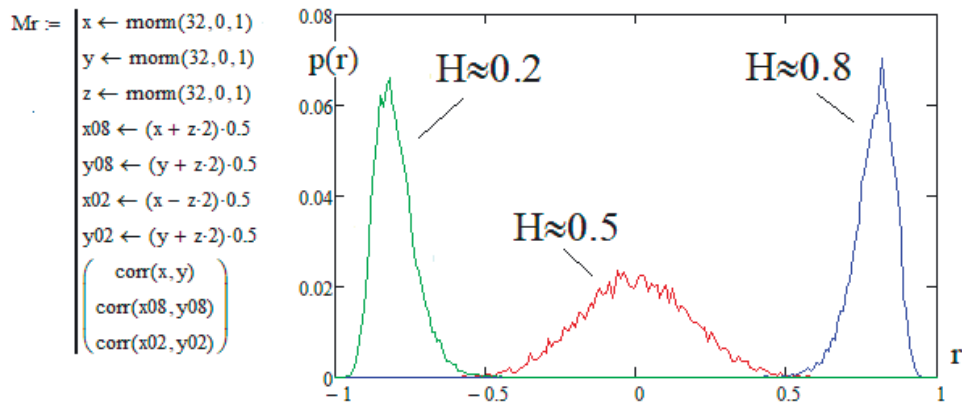


Рис. 2. Распределение данных при моделировании персистентного и антиперсистентного броуновского хаоса

Не способность функционалов Хёрста различать положительно и отрицательно коррелированные траектории хаоса броуновских блужданий

Следует отметить, что сам показатель Хёрста (2) относится к классу автокорреляционных функционалов [7], которые не способны различать положительно и отрицательно коррелированные двумерные траектории броуновских блужданий. В этом можно убедиться, воспользовавшись программой моделирования, приведенной на рис. 3.

При формальных вычислениях показателей Хёрста по Э. Нейману [6] на малых выборках в 32 опыта для случайных данных возникает методическая ошибка оценок. Эта ошибка является аддитивной и может быть скомпенсирована, как отображено в программной реализации (левая часть рисунка 3). Значение аддитивного компенсатора составляет $\Delta H = 0,133$. В этом случае $E(H) = 0,5$, что полностью соответствует теории хаотических броуновских блужданий.

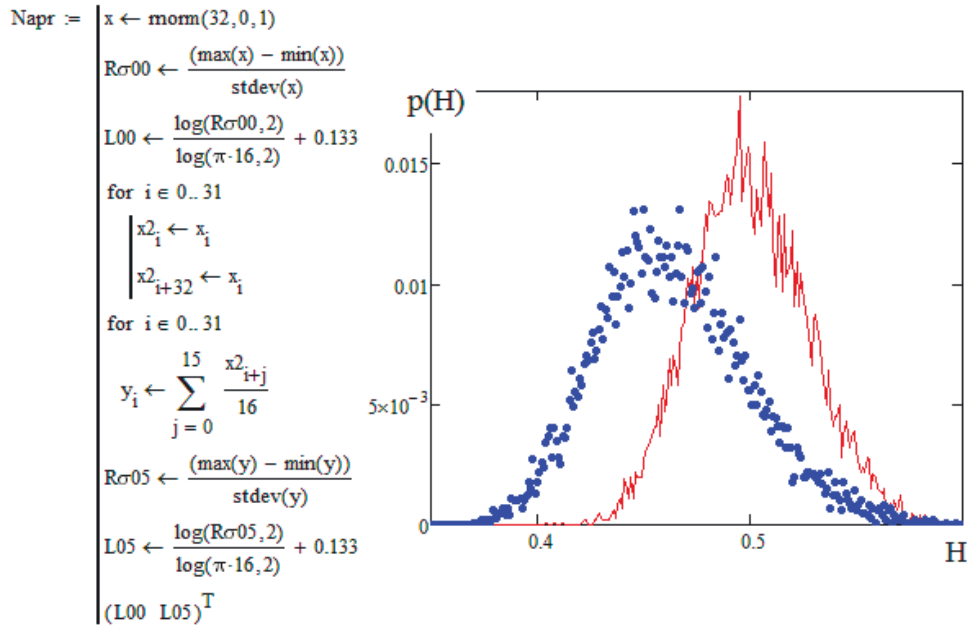


Рис. 3. Пример распределения значений показателей Хёрста для независимых данных (сплошная линия) и положительно сильно коррелированных данных (точки)

Важным фактом является то, что вычисление показателя Хёрста по Э. Нейману [6] всегда дает снижение математического ожидания независимо от знака корреляционной сцепленности точек броуновских блужданий [2, 3].

Устранение неопределенности оценок показателя Хёрста при настройках и тестировании идеального вычислителя

Очевидно, что в процессе численного моделирования броуновских блужданий мы можем воспользоваться классической формулой вычисления коэффициента корреляции (4) и по знаку коэффициента скорректировать распределения оценок сильно корреляционно сцепленных данных. При этом распределение данных по Э. Нейману [6] необходимо зеркально отразить относительно оси $E(H) = 0,5$, как это показано на рис. 4. Зеркальное отображение обусловлено теорией броуновских блужданий и ранее было выполнено на рис. 2.

При численном моделировании с формированием данных по теории броуновских блужданий (рис. 1), реализация преобразований отображенных на рис. 2 и рис. 4 не возникает. Однако при оценках показателя Хёрста на реальных данных рынка и биометрии использовать классическую формулу (4) нет возможности. Это означает, что в ближайшем будущем потребуется создать нейроторый нейросетевой аналог формулы (4), который нужно будет заранее обучить [7] на распознавание положительно коррелированных и отрицательно коррелированных данных некоторых правдоподобно восстановленных броуновских блужданий.

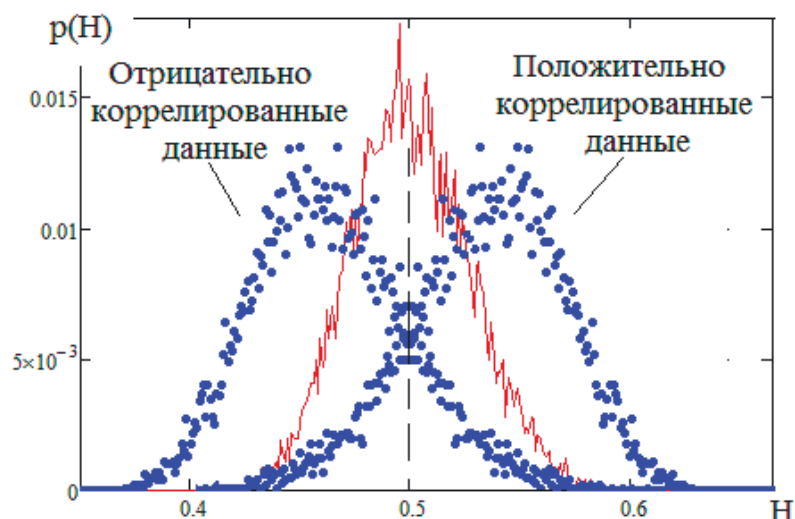


Рис. 4. Распределение Хёрста независимых данных (сплошная линия) и два распределения с положительно и отрицательно коррелированными данными (точки)

Правдоподобное восстановление броуновских блужданий может быть выполнено несколькими способами. То насколько подобное восстановление будет корректным будет определять устранение ошибок оценок показателя Хёрста из-за его неспособности различать положительно и отрицательно коррелированные броуновские движения.

Список литературы

1. Калуш Ю. А., Логинов В. М. Показатель Хёрста и его скрытые свойства // Сибирский журнал индустриальной математики. 2002. Т. 5, вып. 4. С. 29–37.
2. Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка / пер. с англ. В. И. Гусевой). М. : МИР, 2000 г. 333 с.
3. Мандельброт Б., Хадсон З. Л. (НЕ)послушные рынки. Фрактальная революция в финансах. М. ; СПб. ; Киев : Вильямс, 2006. 408 с.
4. Иванов А. И. Высокорамерная коллективная биометрия подсознательного поведения людей на рынке и производстве : препринт. Пенза : Изд-во ПГУ, 2021. 60 с.
5. Федер Е. Фракталы. М. : Мир, 1991. 254 с.
6. Найман Э. Как покупать дешево и продавать дорого : пособие для разумного инвестора. М. : Альпина Паблишерз, 2011. 552 с.
7. Иванов А. И. Нейросетевой многокритериальный статистический анализ малых выборок. Проверка гипотезы независимости : справочник. Пенза : Изд-во ПГУ, 2022. 218 с.

ФОРМАЛИЗОВАННАЯ ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ КОМБИНАТОРНЫМ МЕТОДОМ

Петр Петрович Макарычев

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

makpp@yandex.ru

Аннотация. Задачи с распределением работ и целей могут быть решены различными методами. Одним из широко известных методов является метод целочисленного программирования. Он обеспечивает нахождение оптимального решения, но относится к наиболее сложным вычислительным алгоритмам. С целью снижения времени вычислений разработаны различные комбинаторные алгоритмы. Основной недостаток этих алгоритмов – отсутствие гарантии нахождения оптимального решения задачи. Рассматриваются алгоритмы, обеспечивающие поиск оптимального решения при алгоритмической сложности $O(n^2)$.

Ключевые слова: назначение целей, оптимальное назначение целей, целочисленное программирование, комбинаторный алгоритм, локальная целевая функция, глобальная целевая функция

FORMALIZED STATEMENT AND SOLUTION ASSIGNMENT PROBLEMS USING THE COMBINATORY METHOD

Peter P. Makarychev

Penza State University, Penza, Russia

makpp@yandex.ru

Abstract. Tasks with the distribution of work and goals can be solved by various methods. One of the widely known methods is the integer programming method. This method provides finding the optimal solution, but it belongs to the most complex computational algorithms. In order to reduce the calculation time, various combinatorial algorithms have been developed. The main disadvantage of these algorithms is the lack of a guarantee of finding the optimal solution to the problem. The paper considers algorithms that provide the search for the optimal solution with algorithmic complexity $O(n^2)$.

Keywords: goal assignment, optimal goal assignment, integer programming, combinatorial algorithm, local objective function, global objective function

Комбинаторные задачи. Существует достаточно развитая теория решения комбинаторных задач. Основная цель этой теории –

разработка и анализ быстрых алгоритмов решения различных задач, в том числе и задач о назначении целей. Наиболее универсальными алгоритмами являются алгоритмы перебора всех возможных планов. Алгоритмы эффективны для практических целей в условиях отсутствия существенных ограничений на время решения задачи. Другой разновидностью алгоритмов решения задач о назначениях являются комбинаторные алгоритмы последовательной минимизации (максимизации) целевой функции. В этом случае важно иметь два алгоритма. Первый алгоритм, используемый для предварительного решения задачи о назначениях, с алгоритмической сложностью $O(n)$. Найденное решение может быть вполне допустимым, но не оптимальным. Для реализации второго алгоритма с алгоритмической сложностью $O(n^2), O(n^3)$ необходимо задать локальную и глобальную целевую функцию. Локальная целевая функция предназначена для организации вычислений с целью последовательного приближения значения глобальной целевой функции к оптимальному значению. При этом необходимо иметь строгое обоснование существования необходимого и достаточного условий оптимального решения задачи [1, 2].

Постановка задачи. Предположим, что в зоне ответственности воинского подразделения противовоздушной обороны наблюдается N воздушных целей (ВЦ), различающихся степенью угрозы охраняемому объекту, координатами, скоростью, высотой и направленностью полета. В распоряжении воинского подразделения имеется L средств огневого поражения ВЦ, каждое из которых имеет q_i целевых каналов $Q = [q_i, i = 1, 2, \dots, L]$. Каждая ВЦ характеризуется потенциальной угрозой $w_i, i = \overline{1, N}$ охраняемому объекту, каждое средство поражения – вероятностью поражения ВЦ $p_i, i = \overline{1, L}$. Требуется решить задачу оптимального назначения всех наблюдаемых ВЦ средствам поражения [3, 4].

Решение задачи методом целочисленного программирования. Исходными данными для решения задачи о назначении целей являются: количество наблюдаемых ВЦ N ; количество средств поражения ВЦ L ; наличие в боевой готовности целевых каналов у каждого средства поражения $Q = [q_i, i = \overline{1, L}]$; матрица вероятностей поражения наблюдаемых ВЦ $P = [p_{i,j}, i = \overline{1, L}, j = \overline{1, N}]$; вектор потенциальной угрозы ВЦ охраняемому объекту $W = [w_j, j = \overline{1, N}]$. На основе всех перечисленных выше данных формируется матрица остаточных угроз следующего вида [5]:

$$A = [a_{i,j} = (1 - p_{i,j})w_j, i = \overline{1, L}, j = \overline{1, N}].$$

Задаются начальные значения элементов матрицы назначения. Например:

$$X = [x_{i,j} = 0, i = \overline{1, L}, j = \overline{1, N}].$$

Определяется целевая функция, которая при перечисленных выше параметрах ВЦ и средств поражения имеет следующий вид:

$$F(A, X) = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^N A_{i,j} \cdot X_{i,j} \rightarrow \min \quad (1)$$

Вводятся ограничения на назначения ВЦ следующего вида:

$$\sum_{j=1}^N x_{i,j} \leq q_i, \sum_{i=1}^L x_{i,j} = 1. \quad (2)$$

Первое ограничение – количество назначаемых средству поражения ВЦ не должно быть больше количества целевых каналов. Второе ограничение – каждая ВЦ назначается только одному средству поражения. При указанных выше исходных данных матрица остаточных угроз охраняемому объекту может иметь следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} 78,9 & 73,5 & 44,1 & 82,7 & 49,5 & 54,3 & 54,7 & 8,1 & 81,3 & 63,6 & 42,9 & 61,2 & 59,1 & 58,6 & 30,7 & 49,7 \\ 76,1 & 5,9 & 47,8 & 47,8 & 53,9 & 52,9 & 29,3 & 36,1 & 44,0 & 59,4 & 66,1 & 50,0 & 55,0 & 50,6 & 85,8 & 56,4 \\ 53,3 & 55,1 & 55,1 & 47,9 & 57,0 & 37,1 & 65,4 & 41,9 & 54,0 & 50,6 & 43,0 & 61,1 & 60,4 & 80,7 & 36,7 & 72,8 \\ 24 & 32,7 & 66,1 & 38,2 & 40,5 & 58,1 & 68,3 & 76,4 & 57,4 & 55,0 & 50,0 & 43,6 & 95,7 & 87,8 & 32,0 & 55,9 \end{bmatrix}.$$

Для приведенных выше значений элементов матрицы **A** оптимальное решение уравнений 1, 2 имеет вид:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Общая величина остаточной угрозы при однократном воздействии всех средств огневого поражения на ВЦ принимает значение:

$$W_1 = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^N A_{i,j} X_{i,j} = 599,8.$$

Следует отметить, что алгоритмическая сложность известных и наиболее совершенных алгоритмов целочисленного программирования не менее $O(n^3)$.

3 Комбинаторный конструктивный алгоритм. Этот алгоритм является линейным, так как объем вычислений пропорционален количеству назначаемых ВЦ. Листинг алгоритма для решения задачи в среде математического пакета Mathcad имеет вид:

```

 $D \leftarrow 2 \max(A)$ 
 $S_L \leftarrow 0$ 
 $B_{L,N} \leftarrow 0$ 
for  $j \in 1, 2, \dots, N$ 
     $G \leftarrow A^{(j)}$ 
    for  $i \in 1, 2, \dots, L$ 
         $G_i \leftarrow D$  if  $S_i \geq q_i$ 
     $d_j \leftarrow \min(G)$ 
     $k \leftarrow \text{match}(d_j, G)_1$ 
     $S_k \leftarrow S_k + 1$ 
     $B_{k,i} \leftarrow 1$ 
 $B(\text{вывод})$ 

```

Рис. 1. Листинг конструктивного алгоритма

Результатом выполнения конструктивного алгоритма является матрица назначений следующего вида:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Определяемое матрицей \mathbf{B} назначение ВЦ обеспечивает остаточную угрозу

$$W_2 = \sum_{i=1}^L \sum_j^N A_{i,j} B_{i,j} = 631,4.$$

При этом отклонение величины остаточной угрозы W_2 от оптимального значения W_1 составляет:

$$((W_2 - W_1)/W_1) \cdot 100 = 5,3 \, \%.$$

Таким образом, найденное комбинаторным методом решение, существенно отличается от решения полученного методом целочисленного программирования и не является оптимальным. При этом алгоритмическая сложность решения задачи о назначениях $O(n)$ является минимальной.

3 Решение задачи алгоритмом последовательного поиска.

Предположим, что заданы \mathbf{A}, \mathbf{B} и переменные $i = \overline{1, L}, j = \overline{1, N}, l = \overline{1, L}, g = \overline{1, N}$. В этом случае алгоритм поиска оптимального назначения ВЦ можно реализовать на основе логико-алгебраического правила [6, 7]:

$$\exists i \exists j \exists l \exists g (x_{i,j} = 1)(l \neq j)(g \neq i)(x_{l,g} = 1)P((w_{i,j} + w_{l,g}) > (w_{l,j} + w_{i,g})) \rightarrow \\ \rightarrow (x_{i,j} = 0)(x_{l,g} = 0)(x_{l,j} = 1)(x_{i,g} = 1),$$

где $P((w_{i,j} + w_{l,g}) > (w_{l,j} + w_{i,g}))$ – предикат, определяющий целевую локальную функцию последовательного поиска оптимального значения глобальной целевой функции.

При реализации алгоритма последовательного поиска в качестве начального значения можно использовать результаты решения задачи о назначении ВЦ конструктивным алгоритмом, что существенно снизит объем вычислений. При этом для поиска оптимального решения требуется задать циклы по переменным i, j . Таким образом, для заданных выше $\mathbf{A}, \mathbf{B}, N, L$ найденное решение с использованием алгоритма последовательного поиска является оптимальным и имеет значение, совпадающее с решением методом целочисленного программирования:

$$W_1 = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^N A_{i,j} X_{i,j} = 599,8.$$

Обсуждение и выводы. Для решения задач о назначении ВЦ могут быть использованы различные комбинаторные алгоритмы. Из множества существующих комбинаторных алгоритмов можно выделить две группы алгоритмов. Первую группу составляют конструктивные (жадные) алгоритмы, вторую – алгоритмы последовательного поиска минимума (максимума) на основе локальной и глобальной целевой функции. Последовательное применение выше названных алгоритмов обеспечивает поиск оптимального назначения ВЦ при алгоритмической сложности $O(n^2)$. В работе определены необходимое и достаточное условие существования оптимального решения задачи о назначениях ВЦ комбинаторным методом.

Список литературы

1. Костенко В. А. Алгоритмы комбинаторной оптимизации, сочетающие жадные стратегии и ограниченный перебор // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2017. № 2. С. 48–56.
2. Макарычев П. П. Комбинаторная оптимизация пути коммивояжера с применением тензорной методологии // Аналитические и численные методы

моделирования естественно-научных и социальных проблем : материалы XI Междунар. науч.-техн. конф. / под ред. И. В. Бойкова. Пенза : Изд-во ПГУ, 2016. С. 85–88.

3. Медведева О. А., Полетаев А. Ю. Решение задачи о назначениях с дополнительным требованием // Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии. 2016. № 1. С. 77–81.

4. Лелякова Л. В., Харитонов А. Г., Чернышова Г. Д. Прикладные задачи о назначениях (модели, алгоритмы решения) // Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии. 2017. № 2. С. 22–27.

5. Макарычев П. П. Решение задач о назначениях методом целочисленного программирования // Информационные технологии в науке и образовании. Проблемы и перспективы : материалы VII Всерос. межвуз. науч.-практ. конф. (г. Пенза, 18 марта 2020 г.). Пенза : Изд-во ПГУ, 2020. С. 94–97.

6. Макарычев П. П., Безяев В. С. Решение задачи о назначениях в автоматизированных системах оперативного управления на основе тензорного исчисления // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2015. № 3 (35). С. 77–85.

7. Макарычев П. П. Алгоритм решения задачи о назначениях целей // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : сб. ст. X Междунар. науч.-техн. конф. / под ред. И. В. Бойкова. Пенза : Изд-во ПГУ, 2015. С. 51–54.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВОГО ПРОЦЕССА В ЗОНЕ КОНТАКТА ТРИБОСОПРЯЖЕНИЙ С АНТИФРИКЦИОННЫМИ ПОКРЫТИЯМИ

Александр Николаевич Литвинов

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
fzopgu@mail.ru

Аннотация. Рассматривается зона контакта трибосопряжений с антифрикционными покрытиями. Построено аналитическое решение, позволяющее моделировать тепловой процесс в зоне контакта и определять температуру вспышки на контактной площадке. Численно исследовано влияние основных характеристик слоев трибосопряжения и скоростных режимов трибосопряжений на величину температуры вспышки для подшипника скольжения. Показана эффективность применения антифрикционных покрытий.

Ключевые слова: моделирование, температура вспышки, зона контакта, трибосопряжение, антифрикционное покрытие

SIMULATION OF THE THERMAL PROCESS IN THE CONTACT ZONE OF TRIBO-CONJUGATIONS WITH ANTIFRICTION COATINGS

Alexander N. Litvinov

Penza State University, Penza, Russia
fzopgu@mail.ru

Abstract. The contact zone of tribo-conjugations with antifriction coatings is considered. An analytical solution has been constructed that allows simulating the thermal process in the contact zone and determining the flash point on the contact pad. The influence of the main characteristics of the tribo-conjugation layers and the speed modes of tribo-conjugations on the flash point value for a sliding bearing is numerically investigated. The effectiveness of the use of antifriction coatings is shown.

Keywords: modeling, flash point, contact zone, tribosurfaction, antifriction coating

В изделиях приборостроения широко применяются трибосопряжения различной геометрии, на контактирующих поверхностях которых имеются антифрикционные покрытия, ролью которых является снижение температуры в зоне контакта. Существенную роль в тепловом

процессе играют температурные вспышки, которые возникают на единичных пятнах фактического контакта и могут достигать высоких значений температур, сопоставимых с температурами плавления для материалов контактирующих тел. Время существования температурных вспышек зависит от скорости скольжения и составляет $10^{-3} \dots 10^{-6}$ с. Так как фактическая площадь контакта на несколько порядков меньше номинальной, даже при малых нагрузках контактное давление на дискретных участках контакта может достигать значений твердости одного из материалов контактирующих тел приводит к пластической деформации, а в ряде случаев к свариванию в зоне контакта.[1].

Существующие расчетные формулы для определения температуры вспышки в зоне контакта не учитывают наличие антифрикционных покрытий на поверхностях контактирующих тел, что существенно снижает точность теоретических исследований тепловых процессов в зоне контакта. В тоже время температуру вспышки можно рассматривать как интегральный показатель, определяющий износостойкость трибосопряжений. Поэтому актуальной является задача о теоретическом расчете ее величины в зоне контакта пар трения, на контактирующих поверхностях которых имеются покрытия. Решение этой задачи позволяет теоретически анализировать влияние основных параметров конструкции и характеристик материалов на температуру вспышки и на этой основе на разных стадиях конструкторской разработки выбирать необходимые материалы и покрытия, а также оптимальные режимы работы для контактирующих элементов с целью оптимизации условий работы и повышения износостойкости трибосопряжений.

Так как зона контакта является достаточно малой, то принимаем следующие допущения:

- количество тепла, выделяемого в зоне контакта за счёт трения, передаётся контактирующим телам практически без потерь;
- контактирующие тела являются полубесконечными твёрдыми телами, т.е. размеры фактической площади контакта являются малыми по сравнению с радиусами кривизны контактирующих тел;
- для движущегося источника тепла тепловой поток на площадке контакта рассматривается как одномерный, распространяющийся по нормали к контактирующим поверхностям;
- теплофизические постоянные для материалов контактирующих тел являются постоянными в исследуемом температурном диапазоне.

Расчётная модель показана на рис. 1, где 1 – слой покрытия; 2 – основной материал; l_h – толщина слоя покрытия; x, y – система координат; λ_1, λ_2 – коэффициенты теплопроводности материала покрытия и основного материала соответственно; a_1, a_2 – коэффициенты температуропроводности в слое покрытия и основного материала соответственно.

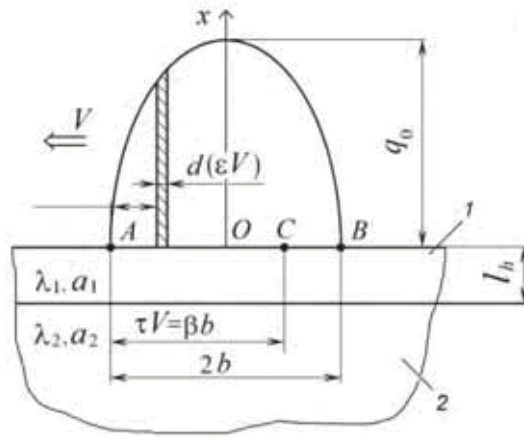


Рис. 1. Модель расчета температуры вспышки

Для рассматриваемой области решение уравнения теплопроводности после использования методов операционного исчисления записывается в виде [2]:

$$dT_* = \frac{dq \cdot a_1}{2\lambda_1 \sqrt{\pi a_1 t}} - \frac{dq \cdot a_1}{2\lambda_1 \sqrt{\pi a_1 t}} \sum_{n=0}^{\infty} k^n \exp \left\{ -\frac{(nl_h)^2}{a_1 t} \right\} + \frac{3dq \cdot a_1 k}{2\lambda_1 \sqrt{\pi a_1 t}} \sum_{n=0}^{\infty} k^n \exp \left\{ -\frac{(n+1)^2 l_h^2}{a_1 t} \right\}, \quad (1)$$

где dT_* – приращение температуры вспышки T_* на поверхности; $k = (1-\omega)/(1+\omega)$, $\omega = \lambda_2 \sqrt{a_1} / \lambda_1 \sqrt{a_2}$ – безразмерные параметры; dq – приращение интенсивности теплового потока, t – время.

Так как теплота, вызываемая трением, пропорциональна величине контактной нагрузки и коэффициенту трения, то область распределения теплового потока считается эллиптической. В этом случае интенсивность теплового потока можно описать выражением

$$q = q_0 \left[1 - \frac{(\varepsilon V - b)^2}{b^2} \right], \text{ при } q_0 = \frac{3}{4b} \delta f N_l (V_1 - V_2) \quad (2)$$

Здесь q_0 – амплитудное значение теплового потока; V – скорость относительного скольжения теплового источника; b – половина ширины контактной площадки; $\varepsilon = \tau - t$, τ – время прохождения зоны контакта.

Амплитуда интенсивности теплового потока, выделяющегося на площадке контакта, рассчитывается по формуле f – коэффициент трения; N_l – интенсивность нормальной нагрузки на площадке контакта (Н/м); δ – коэффициент учитываемой нагрузки, величина которого зависит от геометрии соприкасающихся поверхностей и особенностей работы конструкции в зоне контакта [3].

При тепловом расчете в зоне контактирующих тел ширину площадки контакта определяем из решения контактной задачи теории упругости с учетом геометрии и физико-механических свойств материалов для контактирующих поверхностей [3].

Для анализа теплового процесса в зоне контакта введем безразмерную температуру вспышки \bar{T}_* :

$$\bar{T}_* = \frac{\pi \lambda_1 V}{2 a_1 q_0} T_* . \quad (3)$$

Выполняя интегрирование в (1) с учетом (2) и (3) получим уравнение для определения безразмерной температуры вспышки в зоне контакта:

$$\begin{aligned} \bar{T}_* = & \sqrt{\frac{1}{2} \pi L \beta} \left[\frac{4}{15} \beta (5 - 2\beta) + 4\beta \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{15} \beta \right) \sum_{n=0}^{\infty} k^n \exp \left(-2n^2 h^2 \frac{L}{\beta} \right) + \right. \\ & + 4 \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5} \beta \right) L h^2 \sum_{n=0}^{\infty} k^n \exp \left(-2n^2 h^2 \frac{L}{\beta} \right) - \frac{16}{15} L^2 h^4 \sum_{n=0}^{\infty} k^n \exp \left(-2n^2 h^2 \frac{L}{\beta} \right) - \\ & - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} k^n \operatorname{erfc} \left(n h \sqrt{\frac{2L}{\beta}} \right) \cdot \left\{ n h \sqrt{\frac{2L}{\beta}} 2\beta (2 - \beta) + \frac{8}{3} n^3 h^3 (2L)^{3/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\beta}} (1 - \beta) - \right. \\ & - \left. \frac{8}{15} n^5 h^5 (2L)^{5/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\beta}} \right\} + 12\beta \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{15} \beta \right) \sum_{n=0}^{\infty} k^{n+1} \exp \left\{ -2(n+1)^2 h^2 \frac{L}{\beta} \right\} + \\ & + 12 \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5} \beta \right) L h^2 \sum_{n=0}^{\infty} k^{n+1} (n+1)^2 \exp \left\{ -2(n+1)^2 h^2 \frac{L}{\beta} \right\} - \\ & - \frac{16}{15} L^2 h^4 \sum_{n=0}^{\infty} k^{n+1} (n+1)^4 \exp \left\{ -2(n+1)^2 h^2 \frac{L}{\beta} \right\} - \\ & - \frac{3}{2} \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} k^{n+1} \operatorname{erfc} \left\{ (n+1) h \sqrt{\frac{2L}{\beta}} \right\} \cdot \left\{ 2(n+1) h \sqrt{\frac{2L}{\beta}} \cdot \beta (2 - \beta) + \right. \\ & + \left. \frac{8}{3} (n+1)^3 h^3 (2L)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{\beta}} (1 - \beta) - \frac{8}{15} (n+1)^5 h^5 (2L)^{5/2} \frac{1}{\sqrt{\beta}} \right\} \left. \right] , \quad (4) \end{aligned}$$

где $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$, а $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-\xi^2) d\xi$ – функция ошибок

от параметра x ; $L = Vb/2a_1$ – безразмерная скорость скольжения в зоне контакта тел; $\beta = \tau V/b$ – безразмерная координата, определяющая положение произвольной точки C на площадке контакта (см. рис. 1); $h = l_h/b$ – относительная толщина антифрикционного слоя.

Формула (4) с учетом (3) позволяет рассчитывать температуру вспышки в зоне контакта реального трибосопряжения и выбирать оптимальный вариант покрытия, обеспечивающего наименьшую температуру вспышки.

В качестве примера рассмотрим контактную пару цилиндр–полупространство (рис. 2).

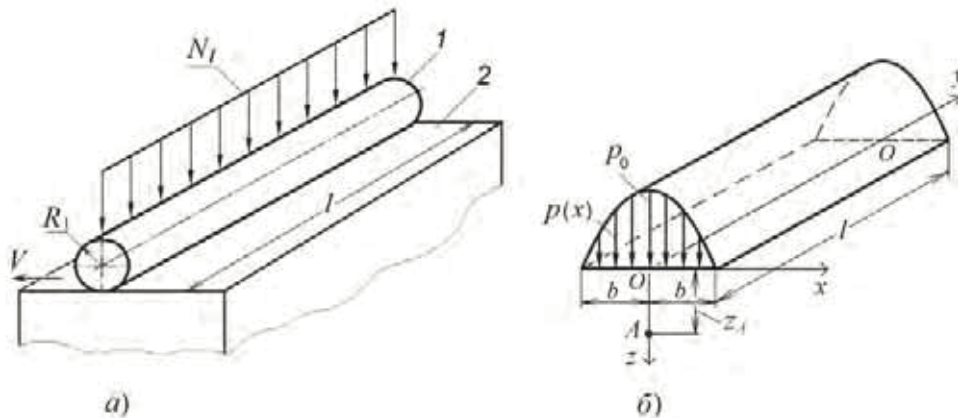


Рис. 2. Контакт цилиндра 1 и плоскости 2:
а – схема контакта; б – распределение контактного давления

Цилиндр 1 с радиусом R_1 движется по поверхности детали 2 со скоростью V и прижимается к поверхности распределенной нагрузкой интенсивностью N_l . Площадка контакта ($2b \times l$) является полосой шириной $2b$. Расчетные формулы для определения основных характеристик в зоне контакта b , максимального контактного давления p_0 для различных схем контактирования тел приведены в работе [3].

Для численного примера принимаем следующие исходные данные:

– материал контактирующих тел – сталь 40ХН с модулем упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, коэффициентом Пуассона $\mu = 0.3$ и пределом текучести $\sigma_T = 1000$ МПа; $N_l = 2 \cdot 10^5$ Н/м; $V = 12$ м/с; $R_1 = 0,02$ м.

Рассмотрим два варианта контактной задачи: контактирующие поверхности не имеют покрытия; на поверхностях имеется покрытие из меди толщиной $l_h = 10$ мкм. Теплофизические характеристики для меди и стали приняты следующими: $\lambda_1 = 380$ Вт/м·К, $a_1 = 1,3 \cdot 10^{-4}$ м²/с; $\lambda_2 = 30$ Вт/м·К, $a_1 = 6,6 \cdot 10^{-6}$ м²/с.

Полученные численные результаты показывают, что введение медного покрытия толщиной l_h на поверхностях контактирующих тел позволяет снизить максимальное значение температуры вспышки в зоне контакта рассматриваемой конструкции трибосопряжения с 603 до 385 °С, т. е. в 1,57 раза при прочих равных условиях контактирования тел. Увеличение толщины покрытия до 15 мкм позволяет снизить температуру вспышки до 328 °С, т.е. в 1,84 раза. Дальнейшее увеличение толщины покрытия является неэффективным.

Нанесение антифрикционного покрытия гальваническим, химическим или иным методом, а также может осуществляться за счет реализации эффекта избирательного переноса [1]. В этом случае покрытие представляет из себя самовосстанавливающуюся в процессе трения

сервовитную пленку, которая не только снижает температуру вспышки, но и повышает износостойкость трибосопряжения в процессе длительной эксплуатации трибосопряжения в экстремальных условиях. Дальнейшее увеличение толщины покрытия является неэффективным

Список литературы

1. Гаркунов Д. Н. Триботехника (износ и безызносность) : учебник. М. : Изд-во МСХА, 2002. 632 с.
2. Terauchi Y. Studies on scoring of Shurgears // Bulletin of the JSME. 1979. Vol. 22, № 164. P. 226–233.
3. Литвинов А. Н. Прикладные вопросы механики контактирующих деформируемых тел : учеб. пособие. Пенза : Изд-во ПГУ, 2012. 166 с.
4. Лурье А. И. Теория упругости. М. : Наука, 1970. 940 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЧАСТОТНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ ВОЛН В РЕКОНФИГУРИРУЕМЫХ 3D-РЕШЕТКАХ ФЕРРОМАГНИТНЫХ НАНОПРОВОЛОК В МИЛЛИМЕТРОВОМ ДИАПАЗОНЕ

Галина Степановна Макеева

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

radiotech@pnzgu.ru

Аннотация. Разработана математическая модель распространения электромагнитных волн в 3D-решетках ориентированных ферромагнитных нанопроволок, базирующаяся на решении 3D-краевой задачи дифракции для уравнений Максвелла, дополненной уравнением Ландау – Лифшица. Методом автономных блоков с каналами Флоке проведено математическое моделирование управляемости частотной дисперсией электромагнитных волн в реконфигурируемых периодических 3D-решетках ориентированных ферромагнитных нанопроволок в зависимости от направления и величины поля подмагничивания в условиях ферромагнитного резонанса в миллиметровом диапазоне при изменении периодичности (плотности упаковки) решеток.

Ключевые слова: краевая задача дифракции, уравнение Ландау – Лифшица, реконфигурируемые 3D-решетки, частотная дисперсия, ферромагнитный резонанс

MODELING CONTROLLABILITY BY FREQUENCY DISPERSION OF WAVES IN RECONFIGURABLE 3D GRATINGS OF FERROMAGNETIC NANOWIRES IN THE MILLIMETER RANGE

Galina S. Makeeva

Penza State University, Penza, Russia

radiotech@pnzgu.ru

Abstract. A mathematical model for the propagation of electromagnetic waves in 3D gratings of oriented ferromagnetic nanowires (FMNW) has been developed, based on solving a 3D boundary value problem of diffraction for Maxwell's equations, supplemented by the Landau-Lifshitz equation. Using the method of autonomous blocks with Floquet channels, mathematical modeling of the controllability of frequency dispersion of electromagnetic waves in reconfigurable periodic 3D gratings of oriented FMNPs is carried out depending on the direction and magnitude of the bias field under ferromagnetic resonance (FMR) conditions in the millimeter wave range with a change in the periodicity (packing density) of the gratings.

Keywords: boundary value problem of diffraction, Landau – Lifshitz equation, reconfigurable 3D-gratings, frequency dispersion, ferromagnetic resonance

1. Математическая модель

Математическая модель базируется на решении краевой задачи дифракции для системы уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{H}(t) = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} + \sigma \vec{E}(t), \quad ; \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}(t) = - \frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t};$$

совместно с уравнением движения вектора намагниченности в форме Ландау-Лифшица [1]

$$\frac{d\vec{M}(t)}{dt} = -\gamma(\vec{M}(t) \times \vec{H}_{\text{эф}}(t)) + \omega_r(\chi_0 \vec{H}(t) - \vec{M}(t)) \quad (2)$$

и дополненной электродинамическими граничными условиями. Здесь $\vec{E}(t), \vec{H}(t)$ – векторы напряженности электрического и магнитного полей; $\vec{B}(t)$ – вектор магнитной индукции; ε_r – относительная диэлектрическая проницаемость среды; σ – электропроводность среды; ε_0 – электрическая постоянная; $\vec{M}(t)$ – вектор намагниченности среды; $\vec{H}_{\text{эф}}(t) = \vec{H}(t) + \vec{H}_q(t)$ – суммарное эффективное поле, включающее поле обменного взаимодействия

$$\vec{H}_q(t) = q \nabla^2 \vec{M}(t),$$

где $q = \frac{2A}{\mu_0 M_s}$; A – константа обменного взаимодействия; M_s – намагниченность насыщения; μ_0 – магнитная постоянная; γ – гиромагнитное отношение; ω_r – частота релаксации; χ_0 – статическая восприимчивость.

Геометрия задачи – направление распространения волнового процесса и модель периодической 3D решетки ориентированных ферромагнитных нанопроволок (ФМНП), которую рассматриваем как квазипериодическую 3D-наноструктуру с геометрическими размерами ячейки a, b, c , показана на рис. 1.

Электродинамическая модель волновых процессов в 3D магнитной нанорешетке строится на основе декомпозиционного подхода [2]. Область периодической 3D решетки ориентированных ФМНП (рис. 1,б) расчленяется условными границами на подобласти – автономные блоки с каналами Флоке (ФАБ) [3], содержащие ФМНП (рис. 1,в). Элементарную ячейку периодической 3D нанорешетки (рис. 1,б) с геометрическими размерами a, b, c , содержащую ФМНП радиуса r и длиной l , представим в виде ФАБ с магнитным нановключением (рис. 1,в).

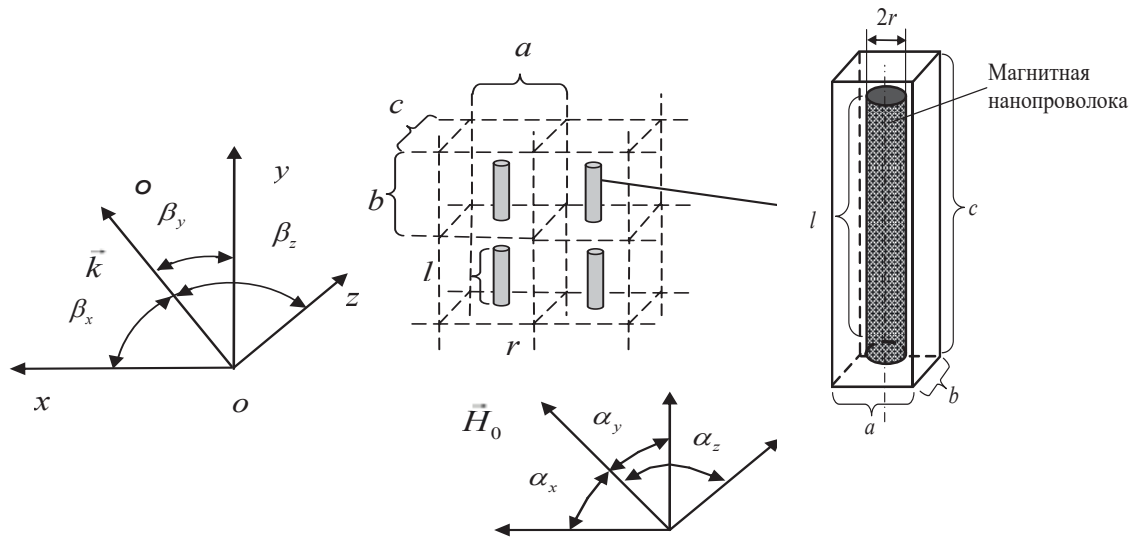


Рис. 1. Электродинамическая модель периодической 3D решетки ориентированных ФМНП:

a – направление распространения волнового процесса с волновым вектором k ;
 b – периодическая 3D наноструктура и ориентация вектора поля подмагничивания \vec{H}_0 ; c – моделирование ячейки периодической 3D наноструктуры на основе ФАБ; a, b, c – геометрические размеры ячейки (ФАБ)

Магнитные нанопроволоки находятся между входными сечениями S_1, S_2 ФАБ (рис. 1,б), рассматриваемого как волноводный трансформатор [2]. На сечениях S_1, S_2 введены локальные системы координат.

Дескриптор (в линейном приближении в виде матрицы рассеяния \mathbf{R} или проводимости \mathbf{Y}) ФАБ, содержащих ФМНП, определяем из решения краевой задачи дифракции [4] проекционным методом Галеркина [5].

2. Способы управления частотной дисперсией волн в 3D решетках ферромагнитных нанопроволок в условиях ФМР

Методом ФАБ проведено математическое моделирование управляемости частотной дисперсией электромагнитных волн в периодических 3D решетках ориентированных ФМНП в зависимости от направления и величины поля подмагничивания \vec{H}_0 в условиях ферромагнитного резонанса (ФМР) в миллиметровом диапазоне волн.

Математическая модель базируется на решении характеристического уравнения для определения волновых чисел Γ_n [6]:

$$\Delta(\Gamma_n) = |Y_{AA} - H^{-1} \cdot Y_{BA} + Y_{AB} \cdot H - H^{-1} \cdot Y_{BB} \cdot H| = 0, \quad (3)$$

где $\Delta(\Gamma_n)$ – определитель матрицы; $Y_{AA}, Y_{BA}, Y_{AB}, Y_{BB}$ – клетки матрицы проводимости \mathbf{Y} ФАБ [3], $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_{AA} & Y_{AB} \\ Y_{BA} & Y_{BB} \end{pmatrix}$ (A, B – индексы входных сечений ФАБ S_1, S_2, S_3 ; и S_4, S_5, S_6 , соответственно);

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_x & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{h}_y & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{h}_z \end{pmatrix} \quad - \quad \text{диагональная матрица с элементами}$$

$h_{x(lj)} = -i\delta_{lj}\Gamma_n a \cos \beta_x, \quad h_{y(lj)} = -i\delta_{lj}\Gamma_n b \cos \beta_y, \quad h_{z(lj)} = -i\delta_{lj}\Gamma_n c \cos \beta_z;$
 $\beta_x, \beta_y, \beta_z$ – углы, задающие направление распространения волнового процесса (рис. 2, а).

На основе характеристического уравнения (3), используя разработанный вычислительный алгоритм расчета матрицы проводимости \mathbf{Y} ФАБ, содержащих ФМНП, проведен электродинамический расчет комплексных волновых чисел Γ_0 (нулевой пространственной гармоники) продольных (правополяризованной и левополяризованной) и поперечных (обыкновенной и необыкновенной) волн, распространяющихся в 3D решетках ФМНП, в зависимости от напряженности поля подмагничивания H_0 на частоте $f = 26$ ГГц.

Материал ФМНП $\text{Co}_{80}\text{Ni}_{20}$ (намагниченность насыщения $4\pi M_s = 15356$ Гс, константа обменного взаимодействия $A = 1,5 \times 10^{-9}$ Э см², параметр диссипации $\alpha = 0,005$); период решетки $a = b = 76$ нм, $c = 550$ нм. Вектор поля подмагничивания \mathbf{H}_0 направлен вдоль оси нанопроволок (рис. 1,б).

Результаты моделирования управляемости частотной дисперсией действительной $\text{Re}\Gamma_0$ и мнимой $\text{Im}\Gamma_0$ частей комплексных волновых чисел Γ_0 правополяризованной и левополяризованной волн (нулевой пространственной гармоники), распространяющихся в 3D решетке ФМНП с продольным подмагничиванием (рис. 2), в зависимости от напряженности поля подмагничивания H_0 на частоте $f = 26$ ГГц показаны на рис. 3.

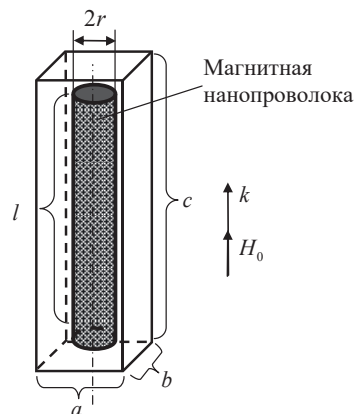


Рис. 2. Продольные волны: моделирование на основе ФАБ;

\mathbf{k} – волновой вектор продольной волны;

\mathbf{H}_0 – вектор поля подмагничивания

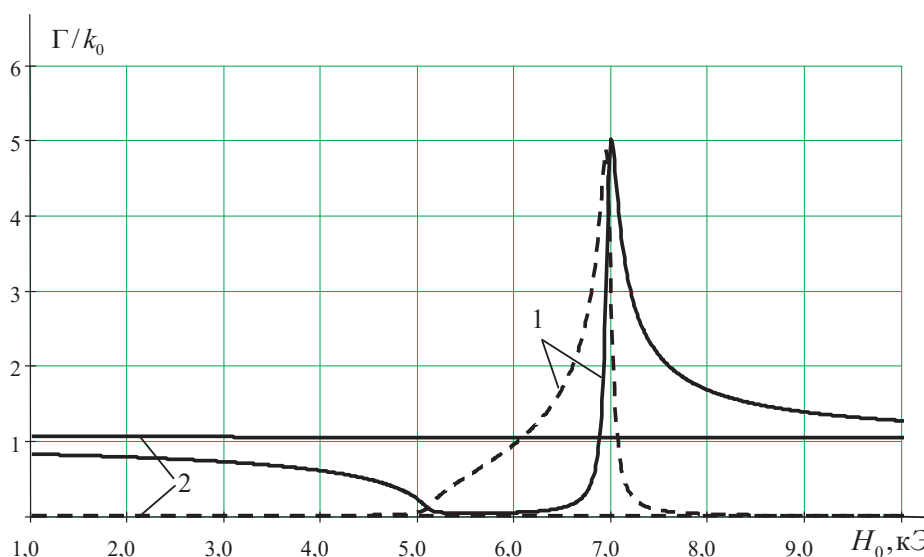


Рис. 3. Управляемость действительной $\text{Re}\Gamma_0$ и мнимой частей $\text{Im}\Gamma_0$ комплексных волновых чисел Γ_0 правополяризованной и левополяризованной волн в 3D решетках ФМНП с продольным подмагничиванием в зависимости от напряженности поля подмагничивания H_0 : $l = 500\text{нм}$, $a = b = 76\text{нм}$, $c = 525\text{нм}$; $f = 26\text{ГГц}$, кривые 1 – правополяризованная волна, 2 – левополяризованная волна; сплошная линия – $\text{Re}\Gamma_0$; пунктирная – $\text{Im}\Gamma_0$

Как следует из результатов моделирования (рис. 3), положение резонансного пика мнимой части $\text{Im}\Gamma_0$ комплексного волнового числа Γ_0 (максимума резонансного поглощения) правополяризованной волны определяется значением напряженности поля подмагничивания $H_{0\text{рез}}$, которое отличается от H_0 в сплошной ферромагнитной среде на частоте ФМР [1]

$$\frac{\omega_0}{\gamma} = H_0$$

(на частоте $f = 26\text{ ГГц}$ ФМР в неограниченной гирромагнитной среде наблюдается при $H_{0\text{рез}} = 9248\text{ Э}$) и соответствует собственной частоте ФМР однородного типа прецессии намагнитченности 3D решетки ФМНП при продольном подмагничивании.

Результаты моделирования управляемости частотной дисперсией действительной $\text{Re}\Gamma_0$ и мнимой $\text{Im}\Gamma_0$ частей комплексного волнового числа Γ_0 квазинеобыкновенной волны, распространяющейся в 3D решетках ФМНП с поперечным подмагничиванием (рис. 4), в зависимости от напряженности поля подмагничивания H_0 на частоте $f = 26\text{ ГГц}$ показаны на рис. 5.

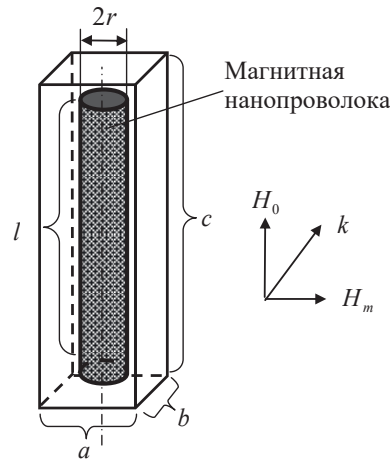


Рис. 4. Поперечные волны: моделирование элементарной ячейки периодической 3D наноструктуры на основе ФАБ; k – волновой вектор поперечной волны; H_0 – вектор поля подмагничивания; H_m – вектор напряженности магнитного поля волны

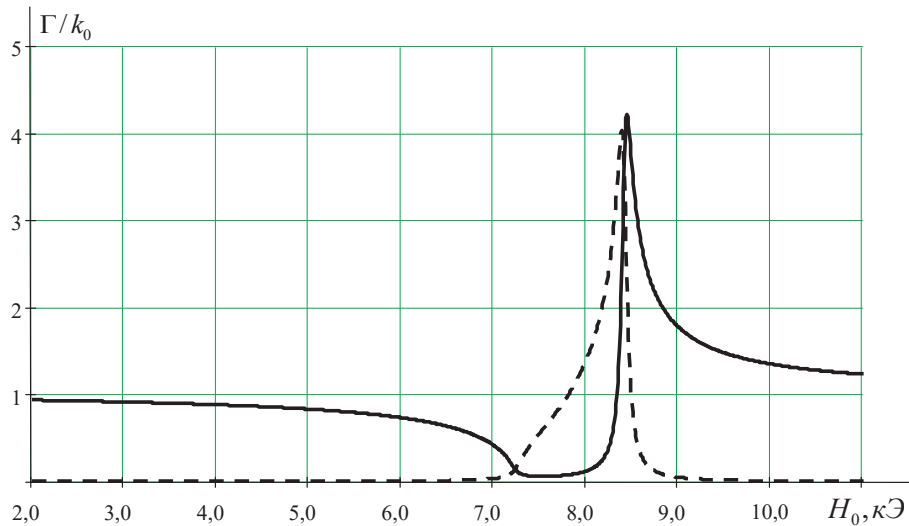


Рис. 5. Управляемость действительной $\text{Re}\Gamma_0$ и мнимой частей $\text{Im}\Gamma_0$ комплексного волнового числа Γ_0 квазиобыкновенной волны в 3D решетках ФМНП с поперечным подмагничиванием в зависимости от напряженности поля подмагничивания H_0 : $2r = 25\text{ нм}$, $l = 500\text{ нм}$, $a = b = 76\text{ нм}$, $c = 525\text{ нм}$; $f = 26\text{ ГГц}$; сплошная линия – $\text{Re}\Gamma_0$; пунктирная – $\text{Im}\Gamma_0$

Из результатов моделирования (рис. 5) следует, что положение резонансного пика мнимой части $\text{Im}\Gamma_0$ комплексного волнового числа Γ_0 квазиобыкновенной волны определяется значением напряженности поля подмагничивания $H_{0\text{рез}}$, которое отличается от H_0 в сплошной ферромагнитной среде на частоте поперечного ФМР [1]

$$\omega_{\perp} = \gamma H_0 \sqrt{1 + \frac{4\pi M_0}{H_0}}$$

(на частоте $f = 26$ ГГц поперечный ФМР в неограниченной гиромангнитной среде наблюдается при $H_0 = 4342$ Э) и соответствует собственной частоте ФМР однородного типа прецессии намагниченности 3D решетки ФМНП при поперечном подмагничивании.

Результаты моделирования управляемости частотной дисперсией действительной $\text{Re}\Gamma_0$ и мнимой $\text{Im}\Gamma_0$ частей комплексного волнового числа Γ_0 квазиобыкновенной волны (нулевой пространственной гармоники), распространяющейся в периодической 3D решетке ориентированных ФМНП в направлении, перпендикулярном \mathbf{H}_0 , при изменении ориентации вектора \mathbf{H}_0 относительно оси ФМНП (рис. 6) в зависимости от напряженности поля подмагничивания H_0 на частоте $f = 26$ ГГц показаны на рис. 7.

Периодическая 3D решетка ориентированных ФМНП (радиус $2r = 50$ нм, длина $l = 500$ нм); материал ФМНП – железо Fe с параметрами: константа обменного взаимодействия $A = 2,2 \cdot 10^{-9}$ Э см²; проводимость $\sigma = 1,03 \cdot 10^5$ Ом⁻¹ · см⁻¹; параметр диссипации $\alpha = 0.0023$; намагниченность насыщения $4\pi M_0 = 21580$ Гс; фактор заполнения ФАБ магнитным компонентом Fe 10 % ($p = 0,1$); размеры элементарной ячейки периодической 3D решетки (ФАБ) (рис. 1,в): $a = b = 25$ нм, $c = 550$ нм.

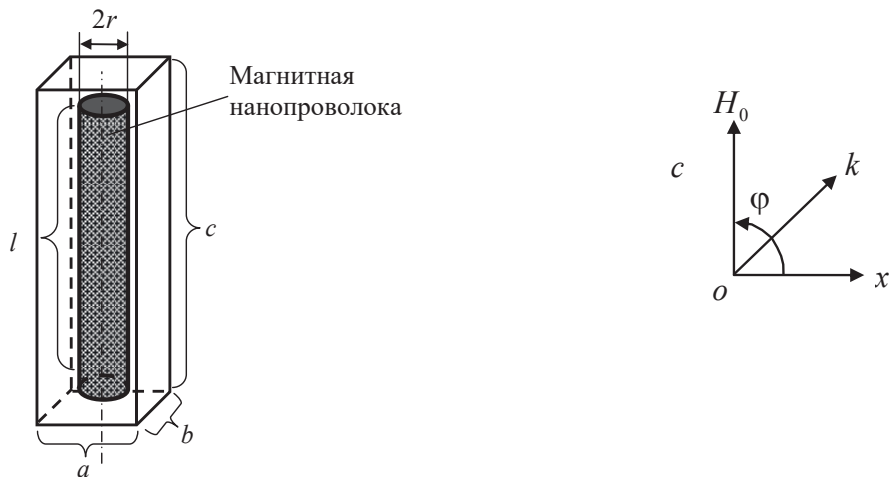


Рис. 6. Моделирование элементарной ячейки периодической 3D наноструктуры на основе ФАБ при изменении ориентации вектора \mathbf{H}_0 относительно оси ФМНЧ; \mathbf{k} – волновой вектор поперечной волны; \mathbf{H}_0 – вектор поля подмагничивания

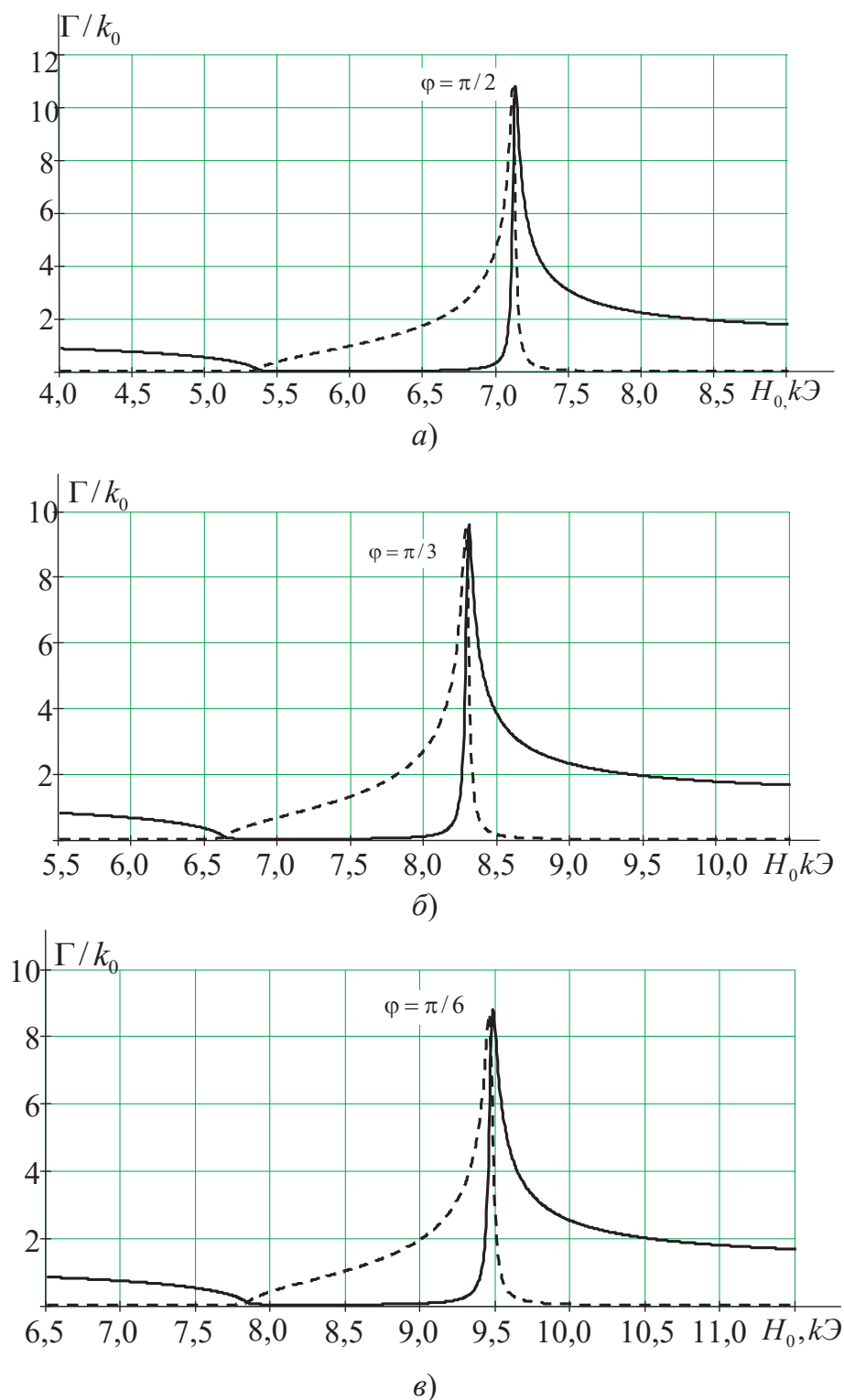


Рис. 7. Управляемость действительной $\text{Re}\Gamma_0$ и мнимой частей $\text{Im}\Gamma_0$ комплексного волнового числа Γ_0 квазиобыкновенной волны в 3D решетке ФМНП с поперечным подмагничиванием в зависимости от напряженности поля подмагничивания H_0 при изменении ориентации вектора \mathbf{H}_0 относительно оси ФМНП:
а) $\varphi = \pi/2$; б) $\varphi = \pi/3$; в) $\varphi = \pi/6$; г) $\varphi = 0$; сплошная линия – $\text{Re}\Gamma_0$;
пунктирная – $\text{Im}\Gamma_0$ (начало)

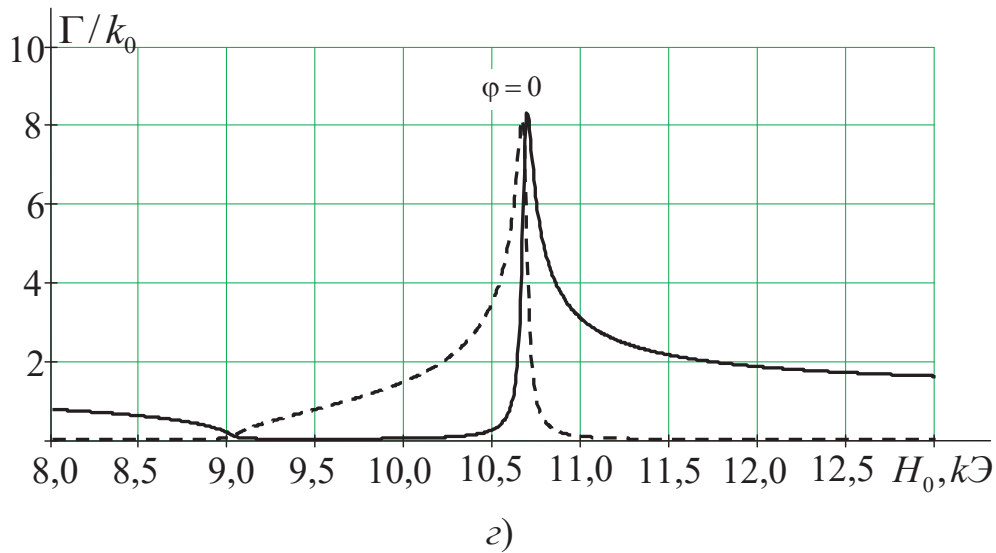


Рис. 7. Окончание

Как видно из графиков на рис. 7,а–з, положение и ширина резонансного пика мнимой части $\text{Im}\Gamma_0$ комплексного волнового числа Γ_0 квазиобыкновенной волны изменяются при изменении ориентации вектора \mathbf{H}_0 относительно оси ФМНП.

Резонансное значение напряженности поля подмагничивания H_0 при ортогональной ($\varphi = \pi/2$ рис. 7,а) ориентации вектора \mathbf{H}_0 относительно оси ФМНП существенно увеличивается в сравнении со случаем параллельной ($\varphi = 0$ рис. 7,з) ориентации вектора \mathbf{H}_0 к оси ФМНП. Это объясняется тем, что при изменении ориентации вектора \mathbf{H}_0 относительно оси ФМНП собственная резонансная частота однородного типа прецессии намагниченности ФМР 3D решетки ФМНП изменяется в пределе от резонансной частоты ФМР продольно намагниченного цилиндра [1]

$$\frac{\omega_0}{\gamma} = (H_0 + 2\pi M_0)$$

до резонансной частоты ФМР поперечно намагниченного цилиндра [1]

$$\left(\frac{\omega_0}{\gamma}\right)^2 = H_0(H_0 - 2\pi M_0)$$

в случае магнитной нанорешетки с малой плотностью упаковки (при расстояниях между ФМНП диаметром $2r = 25$ нм больших, чем $a > 340$ нм).

4. Влияние геометрии решетки на частотную дисперсию в условиях ФМР

Проведено математическое моделирование управляемости характеристик периодических 3D решеток ориентированных ФМНП в зависимости от направления и величины поля подмагничивания \mathbf{H}_0

при изменении периодичности (плотности упаковки) решеток в условиях ФМР в миллиметровом диапазоне.

Результаты моделирования управляемости резонансных пиков мнимой части $\text{Im } \mu^\Sigma$ комплексной диагональной μ^Σ компоненты тензора эффективной магнитной проницаемости магнитного 3D нанокompозита [7] на основе 3D решеток ФМНП с продольным подмагничиванием (рис. 1,б) от напряженности поля подмагничивания H_0 на частоте $f = 26$ ГГц показаны на рис. 8.

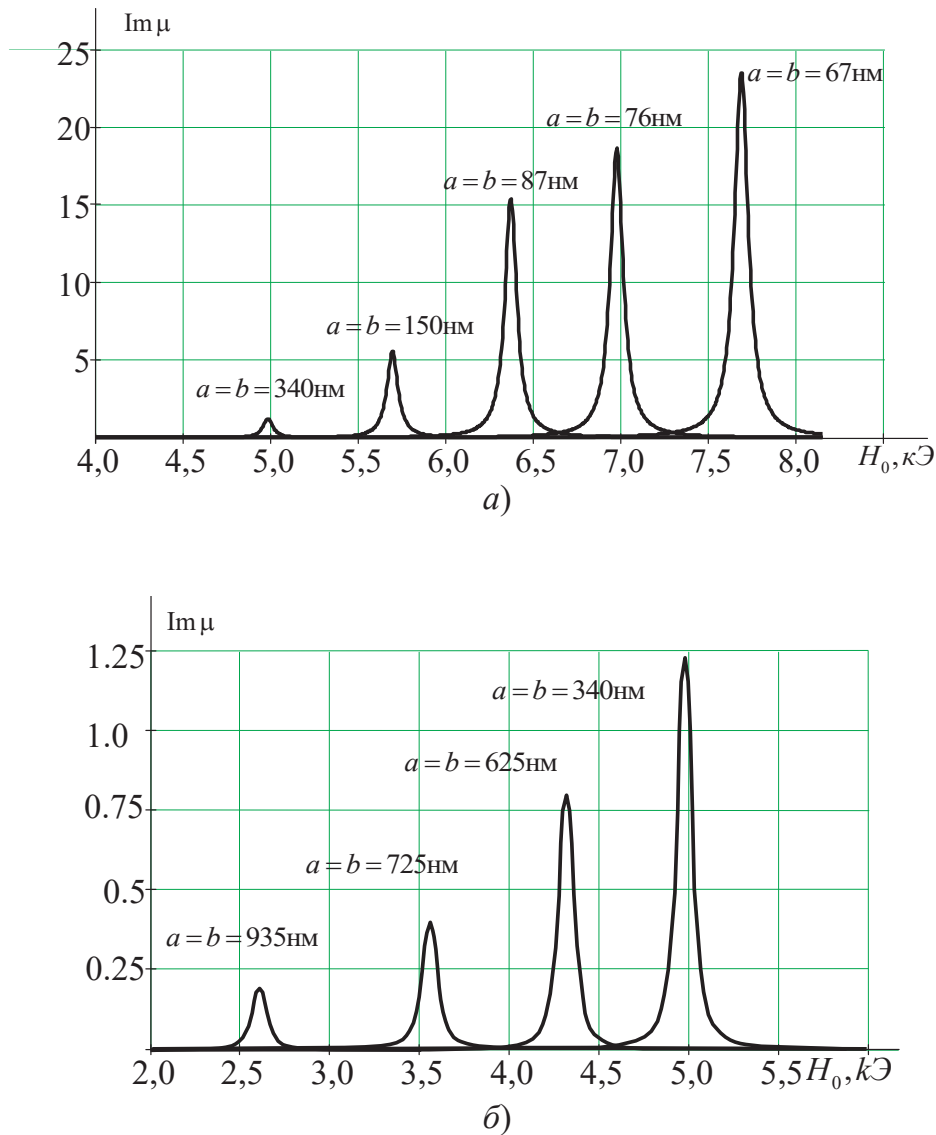


Рис. 8. Управляемость резонансных максимумов мнимой части $\text{Im } \mu$ комплексной диагональной компоненты μ тензора эффективной магнитной проницаемости магнитного 3D нанокompозита (на основе 3D решетки ФМНП с продольным подмагничиванием) от напряженности поля подмагничивания H_0 при изменении периодичности решетки: a – для решетки с высокой плотностью упаковки; b – с низкой плотностью упаковки; $f = 26$ ГГц; $2r = 25$ нм; $l = 500$ нм

Результаты моделирования управляемости резонансных пиков мнимой части $\text{Im} \mu_{\perp}$ комплексной поперечной эффективной магнитной проницаемости μ_{\perp} магнитного 3D нанокompозита [7] на основе 3D решетки ФМНП с поперечным подмагничиванием (рис. 4) от напряженности поля подмагничивания H_0 на частоте $f = 26$ ГГц, показаны на рис. 9.

Кривые на рис. 8, 9 получены для решеток с различным периодом: кривые 1 – $a = b = 340$ нм, 2 – $a = b = 150$ нм, 3 – $a = b = 87$ нм, 4 – $a = b = 76$ нм, 5 – $a = b = 67$ нм, $c = 525$ нм. Графики (рис. 8, 9) иллюстрируют изменение собственной частоты ФМР однородного типа прецессии намагниченности 3D решеток ФМНП в зависимости от периодичности (плотности упаковки) решетки.

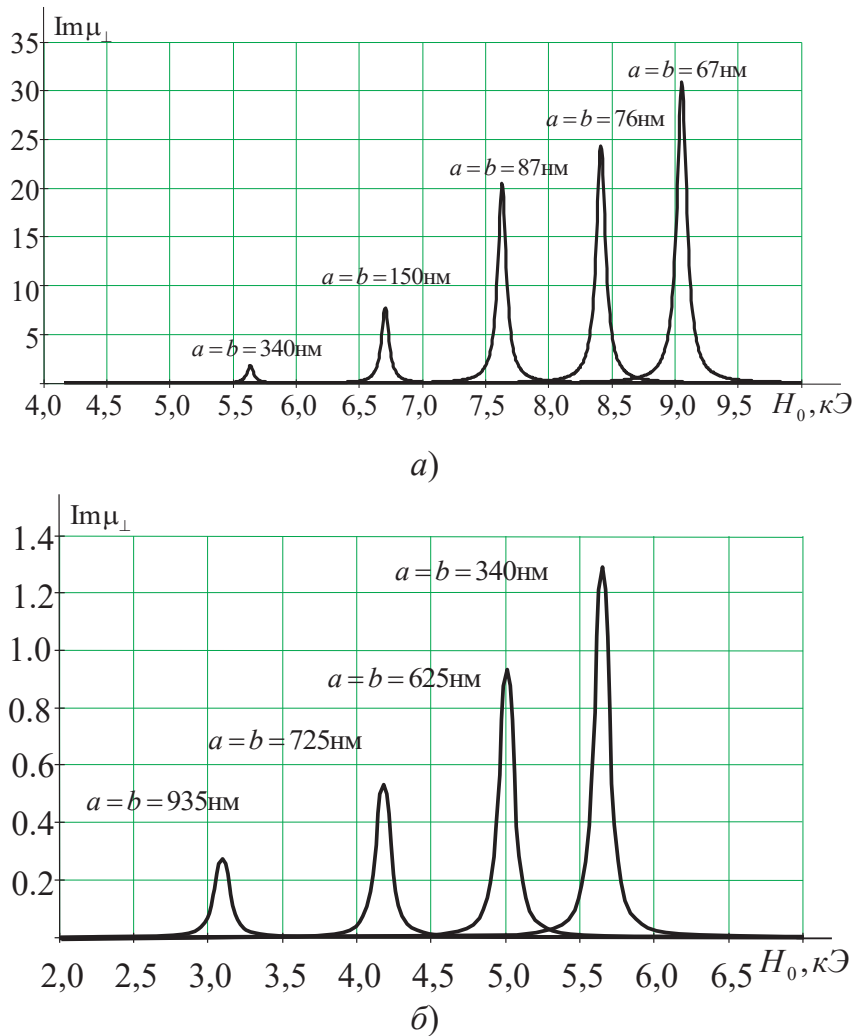


Рис. 9. Управляемость резонансных максимумов мнимой части $\text{Im} \mu_{\perp}$ комплексной поперечной эффективной магнитной проницаемости μ_{\perp} магнитного 3D нанокompозита (на основе 3D решетки ФМНП с поперечным подмагничиванием) в зависимости от напряженности поля подмагничивания H_0 при изменении периодичности решетки:

a – для решетки с высокой плотностью упаковки; \bar{b} – с низкой плотностью упаковки; $f = 26$ ГГц; $r = 25$ нм; $l = 500$ нм

Из результатов математического моделирования (рис. 8,б, 9,б) следует, что в случае магнитной нанорешетки с малой плотностью упаковки (при расстояниях между ФМНП (диаметром $2r = 25$ нм) больших, чем $a > 340$ нм) моделью слоя невзаимодействующих ФМНП является тонкий цилиндр с продольным подмагничиванием $\vec{H}_0 = H_0 \vec{y}_0$ (размагничивающие факторы $N_x = N_y = 2\pi$, $N_z = 0$ [1]). При этом собственная частота ФМР магнитной нанорешетки в пределе приближается к значению, равному резонансной частоте ФМР бесконечно тонкого продольно намагниченного цилиндра [1]

$$\frac{\omega_0}{\gamma} = H_0 + 2\pi M_0$$

(в пределе $H_{0рез} = 1570$ Э как для поперечных, так и для продольных волн (см. графики на рис. 8, 9)).

При сокращении расстояний между ФМНП $a < 340$ нм (переходе в масштаб длины обменного взаимодействия) в системе сильно взаимодействующих ФМНП обменное взаимодействие играет доминирующую роль. При периоде $a = b = 340$ нм 2D магнитная нанорешетка приближается по свойствам к квазисплошной ферромагнитной тонкой пленке с касательным направлением намагниченности (размагничивающие факторы $N_x = 0$, $N_y = 4$, $N_z = 0$ [1]). При этом собственная частота ФМР 2D решетки ФМНП равна значению резонансной частоты ФМР касательно намагниченной пленки [1]

$$\left(\frac{\omega_0}{\gamma} \right)^2 = H_0 (H_0 + 4\pi M_0)$$

(в пределе $H_{0рез} = 4342$ Э как для поперечных, так и для продольных волн (см. графики на рис. 8,б, 9,б)).

При дальнейшем уменьшении периода магнитной нанорешетки (рис. 8,а, 9,а) при сокращении расстояния между ФМНП до длины обменного взаимодействия при наличии сильной связи между ФМНП, обусловленной обменными силами, магнитная нанорешетка с высокой плотностью упаковки приближается по своим свойствам к квазисплошной ферромагнитной среде, при этом собственная частота ФМР однородного типа прецессии намагниченности решетки ФМНП приближается к частоте ФМР в гиромангнитной среде [1]

$$\frac{\omega_0}{\gamma} = H_0$$

(в пределе $H_{0рез} = 9248$ Э для поперечных волн (см. графики на рис. 9,б)).

Список литературы

1. Гуревич А. Г., Мелков Г. А. Магнитные колебания и волны. М.: Наука, 1994. 464 с.

2. Никольский В. В. Декомпозиционный подход к задачам электродинамики. М. : Наука, 1983. 297 с.
3. Голованов О. А. Автономные блоки с виртуальными каналами Флоке и их применение для решения прикладных задач электродинамики // Радиотехника и электроника. 2006. Т. 51, № 12. С. 1423–1430.
4. Голованов О. А., Макеева Г. С. Метод автономных блоков с магнитными нановключениями и каналами Флоке для математического моделирования магнитных наноструктур с учетом обмена и граничных условий // Радиотехника и электроника. 2009. Т. 54, № 12. С. 1345–1352.
5. Никольский В. В. Проекционные методы в электродинамике // Сборник научно-методических статей по прикладной электродинамике. М. : Высш. шк., 1977. С. 4–23.
6. Макеева Г. С., Голованов О. А. Математическое моделирование распространения электромагнитных волн в наноструктурированных гиромангнитных средах методом автономных блоков с магнитными нановключениями и каналами Флоке // Радиотехника и электроника. 2009. Т. 54, № 12. С. 1455–1459.
7. Макеева Г. С., Голованов О. А., Ринкевич А. Б. Электродинамический расчет тензора эффективной магнитной проницаемости магнитных 3D-нанокomпозитов в микроволновом диапазоне // Радиотехника и электроника. 2014. Т. 59, № 1. С. 16–26.

МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ ХАРАКТЕРИСТИК ГРАФЕНОВЫХ ДИФРАКЦИОННЫХ РЕШЕТОК МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ В ТГц-ДИАПАЗОНЕ ЧАСТОТ

*Александр Михайлович Лерер¹,
Галина Степановна Макеева²*

¹ Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

² Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹ lerer@sfedu.ru, ² radiotech@pnzgu.ru

Аннотация. Объект исследования – многослойные 1d и 2d-дифракционные решетки графеновых полосок. Графеновые полоски описываются анизотропными граничными условиями. Краевая задача дифракции сведена к решению парных сумматорных уравнений. Эти уравнения решены методом Галеркина. В качестве базисных функций использованы полиномы Гегенбауэра. Все матричные элементы системы линейных алгебраических уравнений, полученной при решении парных сумматорных уравнений, выражаются в явном виде. Системы линейных алгебраических уравнений имеют быструю внутреннюю сходимость – для достижения погрешности по внутренней сходимости менее 1 % достаточно решать системы линейных алгебраических уравнений 10–20-го порядка. Время счета одной частотной точки – менее 0,1 с. Исследовано влияние магнитного поля и химического потенциала графена на магнитоплазмонный резонанс.

Ключевые слова: парные сумматорные уравнения, анизотропные граничные условия, магнитоплазмонный резонанс, решетки графеновых полосок

MODELING THE CONTROLLABILITY OF THE CHARACTERISTICS OF GRAPHENE DIFFRACTION GRATINGS BY A MAGNETIC FIELD IN THE THZ FREQUENCY RANGE

Alexander M. Lerer¹, Galina S. Makeeva²

¹ Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

² Penza State University, Penza, Russia

¹ lerer@sfedu.ru, ² radiotech@pnzgu.ru

Abstract. The object of research is multilayer 1d and 2d diffraction grating of graphene ribbons. Graphene ribbons are described by anisotropic boundary conditions. The boundary value problem of diffraction is reduced to the solution of paired summator equations (PSEs). These equations are solved by the Galerkin method. Gegenbauer polynomials are used as basis functions. All matrix elements

of the system of linear algebraic equations (SLAEs) obtained by solving the PSEs are expressed explicitly. SLAEs have fast internal convergence – to achieve an error in internal convergence of less than 1 %, it is enough to solve SLAEs of 10–20 order. The counting time of one frequency point is less than 0.1 s. The influence of the magnetic field on the magnetoplasmon resonance has been investigated.

Keywords: paired summation equations, anisotropic boundary conditions, magnetoplasmon resonance, grating of graphene ribbons

Введение

Магнитоплазмоника – новая междисциплинарная область, изучающая взаимодействие между магнетизмом и плазмоникой и имеющая большие перспективы для разработки новых оптических, магнитных и спинтронных устройств для биомедицины, биомедицинских технологий, оптоэлектроники и телекоммуникаций [1]. Магнитоплазмоника находит применение в зондировании (датчики газа, биосенсоры), связи (наноантенны), приложениях терагерцовых (ТГц) волн (перестраиваемые ТГц-клапаны, ТГц-преобразователи поляризации), для магнитной памяти (MRAM) и т.д. [2]. Графеновая плазмоника стала альтернативой традиционной металлической плазмонике (благородные металлы, например, Au и Ag, проявляют плазмонные свойства в чрезвычайно сильных магнитных полях) из-за чрезвычайной локализации, управляемости путем легирования и низким потерям.

Графен – уникальный материал в изучении фундаментальных ограничений плазмоники. Помимо предельно малой толщины монослоя концентрация носителей в графене может регулироваться химическим легированием или приложением электрического поля. Таким образом, электродинамические свойства графена могут варьироваться от проводящих до диэлектрических. Графен поддерживает сильно локализованные поверхностные плазмон-поляритоны (ППП) в широком спектральном диапазоне от ТГц до среднего инфракрасного (ИК) диапазона частот. Графен открывает широкие перспективы для многочисленных приложений фотоники и плазмоники. Графен также обладает сильным магнитооптическим откликом и, таким образом, обеспечивает дополнительные архитектуры для традиционной магнитоплазмоники, основанной на магнитооптически активных металлах или диэлектриках [3].

Благодаря сильному магнитооптическому отклику плазмоны в графене могут активно перестраиваться статическим магнитным полем, что может представлять интерес для применения в плазмонных и магнитооптических устройствах [4].

Графен является многообещающей платформой для конфигурируемых ТГц-устройств благодаря своей реконфигурируемости, но большинство исследований сосредоточено на его электрической перестраиваемости [5].

Перестраиваемые магнитные структуры представляют собой передовую область исследований, потому что мгновенная реакция на магнитное управление без какого-либо контакта делает этот тип метаповерхностей чрезвычайно перспективным [6].

Наносистемы с комбинированными магнитными и плазмонными функциями в последние годы стали предметом активных исследований. При соответствующей внутренней архитектуре составляющих компонентов магнитооптическая активность этих систем может быть значительно увеличена за счет усиления электромагнитного поля, связанного с плазмонным резонансом. В то же время магнитная функциональность позволяет управлять плазмонными свойствами с помощью внешнего магнитного поля, что позволяет разрабатывать активные плазмонные устройства. Эти материалы находят применение, например, в области обнаружения газов и биосенсоров, а также в интегральных фотонных устройствах для телекоммуникаций [7].

Графеновые метаматериалы могут изменять конфигурацию и динамически управлять ТГц волнами. Результаты, полученные в [8], показывают, что магнитная перестройка может эффективно модулировать резонансные свойства кольцевых резонаторов на основе графеновых метаматериалов. При совмещении электрической и магнитной перестройки наблюдается увеличение коэффициента преобразования поляризации, а также достижение значительного угла фарадеевского вращения почти 90 градусов. Эти результаты указывают на потенциал электрически- и магнитоуправляемых функциональных ТГц-устройств на основе графена, включая переключатели, модуляторы, преобразователи поляризации и датчики [8].

Несмотря на большое количество обзорных статей, посвященных плазмонным свойствам и применениям графена, мало что известно о магнитоплазмоне графена и топологических эффектах в наноструктурах на основе графена [3].

Целью работы является разработка математической модели и численное исследование влияния магнитного поля и химического потенциала графена на магнитоплазмонный резонанс в графеновых метаповерхностях в ТГц диапазоне частот.

1. Математическая модель

Проводимость графена в магнитном поле [9]

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ -\sigma_{xy} & \sigma_{xx} \end{pmatrix},$$

где

$$\sigma_{xx} = -\frac{2D}{\pi} i \frac{\omega + iv}{\omega_B^2 - (\omega + iv)^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{2D}{\pi} \frac{\omega_B}{\omega_B^2 - (\omega + iv)^2};$$

$D = \frac{2\sigma_0 E_F}{\hbar}$, $\sigma_0 = 6.08 \times 10^{-5} S$; E_F – энергия Ферми; $\omega_B = \frac{eB_0 v_F^2}{E_F}$ – циклотронная частота; $v_F = 10^6 m/s$ – скорость Ферми.

Можно ввести эквивалентную диэлектрическую проницаемость графена

$$\varepsilon_{mn} = \delta_{mn} - i \frac{Z_0 \sigma_{mn}}{k t},$$

где k, Z_0 – волновое число и волновое сопротивление вакуума, индексы m, n принимают значения x, y .

Пусть графеновые полосы лежат в плоскости $z = 0$. Их поверхность в пределах элементарной ячейке обозначим через S . Пусть заданы плотности токов на полосках \mathbf{J} . Тогда нетрудно найти электромагнитное поле, создаваемое этими токами. В частности, [10]

$$\mathbf{E}(x, y, 0) = -iZ_0 \frac{4}{d_x d_y} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{g}_{mn}(0, 0) \mathbf{j}_{mn} \exp[i(\alpha_m x + \beta_n y)],$$

где $\mathbf{j}_{mn} = \int_S \mathbf{J}(x', y') [-i(\alpha_m x' + \beta_n y')] ds$, d_x, d_y – периоды решетки

по осям x, y ; $\mathbf{G}(\bar{x}, \bar{y}, z, z') = \frac{4}{d_x d_y} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{g}_{mn}(z, z') \exp[i(\alpha_m \bar{x} + \beta_n \bar{y})]$ –

2d периодическая тензорная функция Грина; $\bar{x} = x - x', \bar{y} = y - y'$,

$\alpha_m = \frac{2m\pi}{d_x} + k_x, \beta_n = \frac{2n\pi}{d_y} + k_y$, k_x, k_y – компоненты волнового вектора.

Используем граничные условия на графеновых полосках – непрерывность касательного электрического поля и

$$\mathbf{J}(x, z) = \boldsymbol{\sigma} [\mathbf{E}(x, y, 0) + \mathbf{E}^{ext}(x, y, 0)]$$

(в это уравнение входят касательные компоненты поля), получим первую пару уравнений

$$\mathbf{E}^{ext}(x, y, 0) - iZ_0 \frac{4}{d_x d_y} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{g}_{mn}(0, 0) \mathbf{j}_{mn} \exp[i(\alpha_m x + \beta_n y)] = \boldsymbol{\sigma}^{-1} \mathbf{J}(x, y), x, y \in S. \quad (1)$$

Вторая пара уравнений следует из отсутствия тока вне S

$$\frac{4}{d_x d_y} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{j}_{mn} \exp[i(\alpha_m x + \beta_n y)] = 0, x, y \notin S.$$

Так как решение для 2d решеток принципиально не отличаются от решения для 1d решеток [10], то рассмотрим для уменьшения количества выкладок решение для 1d решеток. Ленты шириной $2l$ расположены

вдоль оси y . В этом случае в (2), (3) в сумме по n остается только нулевой член. Зависимость от продольной координаты $\exp(ik_y y)$

Эти уравнения решаем методом Галеркина [10]

$$i_x(x) = \sum_{j=0}^{\infty} X_j^{(1)} B_j^{(3/2)}(x), j_y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} X_j^{(2)} B_j^{(1/2)}(x),$$

где $B_j^{(\nu)}(x) = Z_j^{(\nu)} (l^2 - x^2)^{\nu-1/2} C_j^{\nu} \left(\frac{x}{l} \right)$; C_j^{ν} – полиномы Гегенбауэра.

Для идеально проводящей полоски

$$B_j^{(1/2)}(x) = Z_j^{(1/2)} (l^2 - x^2)^{-1/2} T_j \left(\frac{x}{l} \right), B_j^{(3/2)}(x) = Z_j^{(3/2)} (l^2 - x^2)^{1/2} U_j \left(\frac{x}{l} \right),$$

где T_j, U_j – полиномы Чебышева.

Коэффициенты $Z_j^{(\nu)}$ (вид их здесь не приводим) выберем так, чтобы

$$\tilde{B}_j^{(\nu)}(\alpha_m) = \int_{-l}^l Z_j^{(\nu)} (l^2 - x^2)^{\nu-1/2} C_j^{\nu} \left(\frac{x}{l} \right) \exp(-i\alpha_m x) dx = \frac{J_{j+\nu}(\alpha_m l)}{(\alpha_m l)^{\nu}}. \quad (2)$$

Основная трудность при применении метода Галеркина в данном случае – нахождение интегралов в (1)

$$P_{j',j}^{(\nu',\nu)} = \int_{-l}^l B_{j'}^{(\nu')*}(x) B_j^{(\nu)}(x) dx.$$

Используем равенство Парсеваля и (2).

$$P_{j,j'}^{(\nu,\nu')} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_{j+\nu}(\alpha l)}{(\alpha l)^{\nu}} \frac{J_{j'+\nu'}(\alpha l)}{(\alpha l)^{\nu'}} d\alpha.$$

Если j, j' разной четности, то $P_{j,j'}^{(\nu,\nu')} = 0$. В противном случае [Градштейн, с. 706]

$$P_{j,j'}^{(\nu,\nu')} = \frac{1}{\pi l} \frac{1}{2^{\nu'+\nu}} \Gamma(\nu' + \nu) \frac{\Gamma\left(\frac{j+j'+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{j+j'+1}{2} + \nu' + \nu\right)} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{j-j'+1}{2} + \nu\right) \Gamma\left(\frac{j'-j+1}{2} + \nu'\right)}. \quad (6)$$

Получить частные случаи из (6) легко.

$$P_{j',j}^{(1/2,1/2)} = \frac{1}{\pi l} \frac{1}{2j+1} \delta_{jj'},$$

Обозначим $u = \frac{j+j'+1}{2}$.

$$P_{j,j'}^{(3/2,3/2)} = \begin{cases} \frac{1}{\pi l} \frac{1}{2^2} \frac{1}{(2+u)(1+u)u}, j = j'; \\ \frac{1}{\pi l} \frac{1}{8} \frac{1}{(2+u)(1+u)u}, j+2 = j'; \\ 0, |j-j'| > 2. \end{cases}$$

$$P_{j,j'}^{(1/2,3/2)} = \frac{1}{\pi l} \frac{1}{4} \frac{1}{(1+u)u} \sigma_{j,j'},$$

$\sigma_{jj} = 1$ при $j' = j$ или $j = j' - 2$. В остальных случаях $\sigma_{jj} = 0$.

Таким образом, все матричные элементы системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), полученной при решении (1) методом Галеркина, выражаются в явном виде. СЛАУ имеют быструю внутреннюю сходимость – для достижения погрешности по внутренней сходимости менее 1 % достаточно решать СЛАУ 10–20 порядка. Время счета одной частотной точки менее 0.1 с.

2. Результаты моделирования

Один из результатов расчета представлен на рис. 1. Период 1d решетки 60 мкм, ширина лент 50 мкм, подложка с $n=1.414$. Между подложкой и графеновой решеткой – диэлектрический слой толщиной 35 мкм с $n=1.717$.

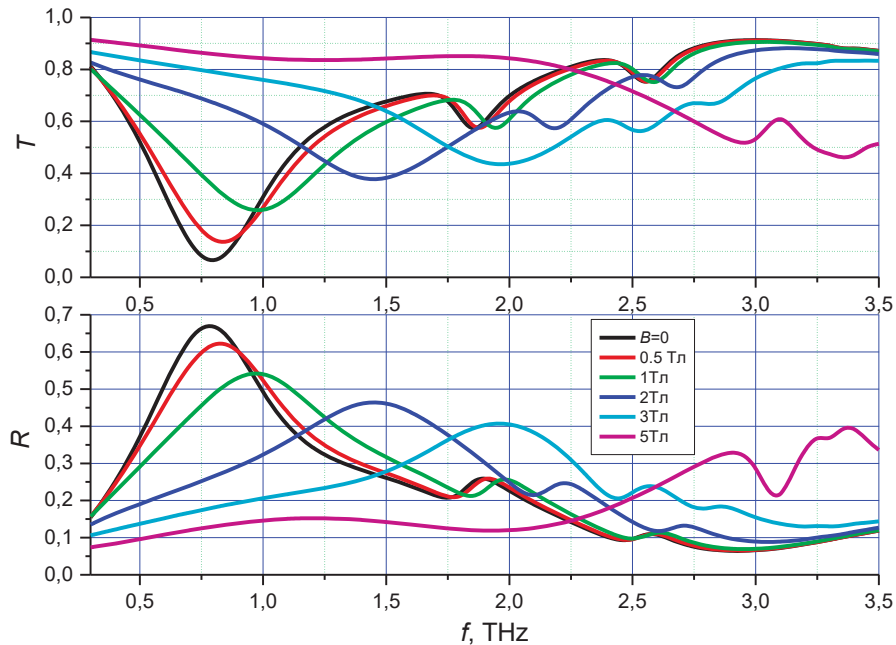


Рис. 1. Частотные зависимости коэффициентов прохождения T и отражения R при дифракции волны на дифракционной решетке из графеновых полосок в магнитном поле для различных значений индукции B : $E_F = 0.25$ эВ

3. Заключение

Таким образом, решена краевая задача о дифракции плоской электромагнитной волны на дифракционной решетке из графеновых полосок при наличии магнитного поля. При решении полученных парных сумматорных уравнений использован базис в виде полиномов Лежандра и Гегенбауэра. Все матричные элементы системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), полученной при решении ПСУ, выражаются в явном виде. СЛАУ имеют быструю внутреннюю сходимость.

Результаты исследования влияния магнитного поля и химического потенциала графена на магнитоплазмонный резонанс применимы для разработки ТГц-устройств на основе графеновых метаповерхностей с комбинированным электрическим и магнитным управлением.

Список литературы

1. Rahulkumar S. S., Prashant K. S. From fundamentals to applications: The development of magnetoplasmonics for next-generation technologies // *Materials Today Electronics*. 2023. Vol. 4. P. 100033.
2. URL: <https://www.honeycusat.org/magnetoplasmonics.php>
3. Kuzmin D. A., Bychkov I. V., Shavrov V. G. [et al.]. Plasmonics of magnetic and topological graphene-based nanostructures // *Nanophotonics*. 2018. Vol. 7, № 3. P. 597–611. doi: 10.1515/nanoph-2017-0095
4. Ningning Wang, Linhui Ding, Weihua Wang. Chemical potential and magnetic field effects on graphene magnetoplasmons // *Phys. Rev. B*. 2023. Vol. 108, № 8. P. 085406–085415.
5. Yafeng Lu, Chen Wang, Shiqiang Zhao [et al.]. Magnetically Tunable Graphene-Based Terahertz Metasurface // *Front. Phys., Sec. Optics and Photonics*. 2020. Vol. 8. P. 622839. doi: 10.3389/fphy.2020.622839
6. Santonocito A., Patrizi B., Toci G. Recent Advances in Tunable Metasurfaces and Their Application in Optics // *Nanomaterials (Basel)*. 2023. Vol. 13, № 10. P. 1633. doi: 10.3390/nano13101633
7. Armelles G., Cebollada A., García-Martín A. [et al.]. Magnetoplasmonics: Combining Magnetic and Plasmonic Functionalities // *Advanced Optical Materials*. 2013. Vol. 1, № 1. P. 10–35.
8. Zesen Zhou, Zhilong Gan, Lei Cao. Enhanced polarization conversion and giant Faraday rotation in patterned terahertz graphene metamaterials with combined electrical and magnetic tuning // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2023. Vol. 56. P. 365104. doi: 10.1088/1361-6463/acda45
9. Jian-Qiang Liu, Yu-Xiu Zhou, Li Li [et al.]. Controlling plasmon-induced transparency of graphene metamolecules with external magnetic field // *Opt. Express*. 2015. Vol. 23. P. 12524–12532.
10. Лерер А. М., Макеева Г. С., Черепанов В. В. Нелинейное взаимодействие терагерцевых волн с наноструктурированным графеном в резонансных многослойных плазмонных структурах // *Радиотехника и электроника*. 2021. Т. 68, № 6. С. 543–552. doi: 10.31857/S0033849421060188

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОВОГО БАЛАНСА В МОДЕЛИ ОКИСЛИТЕЛЬНОЙ РЕГЕНЕРАЦИИ КАТАЛИЗАТОРА

Ольга Сергеевна Язовцева

Математический институт имени В. А. Стеклова
РАН, Москва, Россия
kurinaos@gmail.com

Аннотация. Предложено исследование модели окислительной регенерации слоя катализатора. Модель описана параболическими уравнениями, отвечающими материальному и тепловому балансу процесса. При анализе асимптотических свойств решений модель сведена к стационарной. В стационарной модели исследовано поведение решений на основе теоремы Ляпунова о неустойчивости.

Ключевые слова: окислительная регенерация, тепловой баланс, параболические уравнения, устойчивость решений

Финансирование: исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19-71-30012.

INVESTIGATION OF HEAT BALANCE IN THE MODEL OF THE CATALYST OXIDATIVE REGENERATION

Olga S. Yazovtseva

Steklov Mathematical Institute
of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
kurinaos@gmail.com

Abstract. The equations of the material balance of oxidative regeneration of the catalyst spherical grain are considered. The resulting system contains inhomogeneous nonlinear equations of parabolic type. The study of a nonlinear system is reduced to the study of a linear equation by transformations, which is decomposed using the continuous Galerkin method. The stable linear system of ordinary differential equations with respect to the decomposition coefficients is obtained. The conclusion is made about the dynamic stability of solutions to the equations of material balance based on the decomposition.

Keywords: oxidative regeneration, heat balance, parabolic equations, stability of solution

Financing: this work was supported by the Russian Science Foundation under grant no. 19-71-30012.

Одним из требований, предъявляемых к химическому реактору при вводе его в эксплуатацию, является стабильность режимов его работы. Простейшие модели реакторов и исследование стабильности режимов классическими методами приведены при определенных допущениях в книгах [1, 2]. Реальные практические модели химических процессов часто очень сложны. Они описываются нелинейными дифференциальными уравнениями теплового и материального баланса, где концентрация веществ, температура реакционной смеси и температура катализатора или стенок реактора являются фазовыми переменными [3–7].

Применение качественного анализа для решения практических задач всегда сопряжено с трудностями, связанными с нехваткой теоретических методов. Как правило, использование классических подходов требует более жестких формулировок, предварительного исследования корректности постановки задачи и т.д. При этом неклассический аппарат сложен в применении в силу узкой специализации теоретических разработок. В теории дифференциальных уравнений нередко ситуация, когда изначально не подпадающая под входные условия метода исследования система может быть преобразована к удовлетворительному виду.

Настоящая статья посвящена исследованию свойств решений системы уравнений в частных производных, отвечающей тепловому балансу процесса окислительной регенерации слоя катализатора [8].

Рассмотрим модель теплового баланса окислительной регенерации катализатора, записанную в следующем виде:

$$\begin{cases} u c_p \frac{\partial T_g}{\partial l} = \alpha S_p (T_p - T_g), \\ \gamma_p \frac{\partial T_p}{\partial t} = -\alpha S_p (T_p - T_g) + \lambda_l \frac{\partial^2 T_p}{\partial l^2} + \tilde{Q} \exp\left(-\frac{E}{R T_p}\right). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь T_g – температура газа в слое катализатора; T_p – температура слоя катализатора; l – координата по длине слоя; $t \in [0, +\infty)$ – время; u – скорость газа; c_p – объемная теплоемкость газа; α – коэффициент теплообмена между газом и слоем катализатора; S_p – удельная поверхность катализатора; γ_p – удельная теплоемкость зерна катализатора; λ_l – эффективный коэффициент теплопроводности слоя катализатора; \tilde{Q} – постоянный множитель, включающий в себя тепловой эффект реакции; E – энергия активации; R – универсальная газовая постоянная. В качестве начально-краевых условий можно выбрать следующие:

$$T_g(0, t) = T_g^0, \frac{\partial T_p}{\partial l} \Big|_{l=0} = 0, \frac{\partial T_p}{\partial l} \Big|_{l=L} = 0, T_p(l, 0) = T_p^0,$$

здесь L – длина слоя катализатора.

Система (1) не включает в себя уравнения для учета изменения концентраций в ходе химических реакций, поскольку концентрации реагентов изменяются в пределах от 0 до 1 и их вхождение в уравнение для температуры зерна катализатора полиномиально. Максимальная оценка вклада концентраций в разогрев слоя катализатора включена в множитель \tilde{Q} .

Зафиксируем момент времени t^* и запишем изменение температурных показателей газа и слоя катализатора по длине слоя при t^* :

$$\begin{cases} u c_p \frac{\partial T_g}{\partial l} = \alpha S_p (T_p - T_g), \\ \lambda_l \frac{\partial^2 T_p}{\partial l^2} = \alpha S_p (T_p - T_g) - \tilde{Q} \exp\left(-\frac{E}{R T_p}\right). \end{cases} \quad (1)$$

Для понижения порядка системы выполним замену:

$$x_1 = T_g; \quad x_2 = T_p; \quad x_3 = \frac{\partial T_p}{\partial l}. \quad (2)$$

Система (1) примет вид:

$$\begin{cases} u c_p \frac{dx_1}{dl} = \alpha S_p (x_2 - x_1), \\ \frac{dx_2}{dl} = x_3 \\ \lambda_l \frac{dx_3}{dl} = \alpha S_p (x_2 - x_1) - \tilde{Q} \exp\left(-\frac{E}{R x_2}\right). \end{cases} \quad (3)$$

У системы (3) отсутствуют положения равновесия, но правая часть системы стремится к нулю в окрестностях точки $O = (0,0,0)^T$. Ставится задача об исследовании поведений решений системы в окрестности точки O .

В качестве линейного приближения системы возьмем матрицу Якоби в окрестности точки O :

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{u c_p} & \frac{\alpha}{u c_p} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\alpha}{\lambda} & \frac{\alpha}{\lambda} & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы A равны

$$\left(\frac{-\alpha\lambda + \sqrt{4\alpha c_p \lambda u^2 + \alpha^2 \lambda^2}}{2\lambda u c_p}, -\frac{\alpha\lambda + \sqrt{4\alpha c_p \lambda u^2 + \alpha^2 \lambda^2}}{2\lambda u c_p}, 0 \right),$$

при этом

$$\frac{-\alpha\lambda + \sqrt{4\alpha c_p\lambda u^2 + \alpha^2\lambda^2}}{2\lambda u c_p} > 0$$

для любого положительного набора параметров.

Наличие положительного собственного значения в матрице линейного приближения означает неустойчивость решений в окрестности точки $(0,0,0)^T$.

Графики решений, иллюстрирующие возникновение неустойчивости приведены на рис. 1.

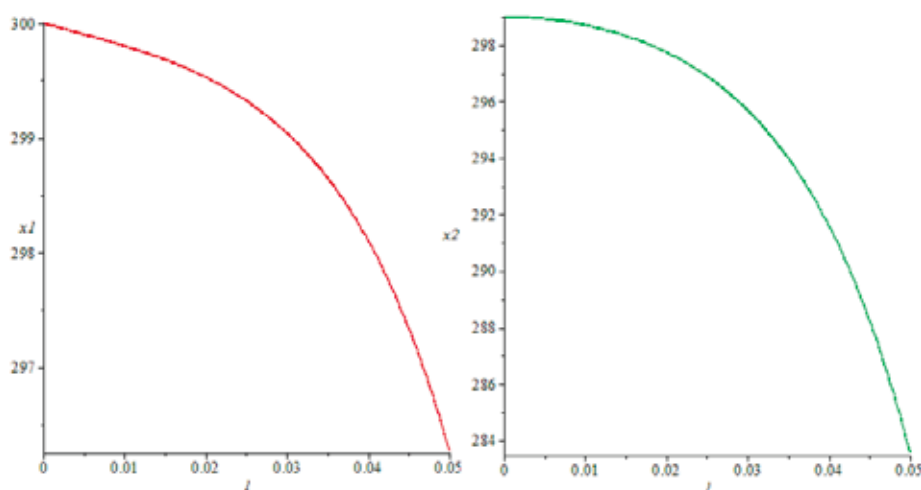


Рис. 1. Графики решений $x_1(l)$ и $x_2(l)$.

Таким образом независимо от выбора момента времени, в математической модели будут возникать неустойчивые явления. Это свидетельствует о необходимости исследования нестационарных моделей окислительной регенерации, поскольку важен учет динамики возникающих процессов.

Список литературы:

1. Вольтер Б. В., Сальников И. Е. Устойчивость режимов работы химических реакторов. М. : Химия, 1981. 200 с.
2. Д. Перлмуттер. Устойчивость химических реакторов. Л. : Химия. Ленингр. отд-ние, 1976. 256 с.
3. Масагутов Р. М., Морозов Б. Ф., Кутепов Б. И. Регенерация катализаторов в нефтепереработке и нефтехимии. М. : Химия, 1987. 144 с.
4. Yazovtseva O. S., Gubaydullin I. M., Inshakova A. S., Peskova E. E., Rodkina D. A. Investigation of Material Balance in the Model of Oxidative Regeneration of a Spherical Grain // Technical Physics. 2023. doi: 10.1134/S1063784223040072
5. Gubaydullin I. M., Peskova E. E., Yazovtseva O. S., Zagoruiko A. N. Numerical Simulation of Oxidative Regeneration of a Spherical Catalyst Grain // Mathematical Models and Computer Simulations. 2023. Vol. 15. P. 485–495. doi: 10.1134/S2070048223030079

6. Yazovtseva O. S., Gubaydullin I. M., Peskova E. E., Sukharev L. A., Zagoruiko A. N. Computer Simulation of Coke Sediments Burning from the Whole Cylindrical Catalyst Grain // Mathematics. 2023. Vol. 11 (669). doi: 10.3390/math11030669

7. Lashina E. A., Peskova E. E., Snytnikov V. N. Mathematical Modeling of the Homogeneous-Heterogeneous Non-Oxidative CH₄ Conversion: The Role of Gas-Phase H or CH₃ // Reaction Kinetics, Mechanisms and Catalysis. 2023. Vol. 136, № 4. P. 1775–1789. doi: 10.1007/s11144-023-02442-8

8. Reshetnikov S. I., Petrov R., Zazhigalov S., Zagoruiko A. N. Mathematical modeling of regeneration of coked Cr-Mg catalyst in fixed bed reactors // Chemical Engineering Journal. 2020. P. 380. doi: 10.1016/j.cej.2019.122374

9. Матрос Ю. Ш.. Каталитические процессы в нестационарных условиях. Новосибирск : Наука, 1987. 228 с.

10. Балаев А. В., Дробышевич В. И., Губайдуллин И. М., Масагутов Р. М. Исследование волновых процессов в регенераторах с неподвижным слоем катализатора // Распространение тепловых волн в гетерогенных средах. Новосибирск : Наука. Сибирское отделение, 1988. С. 233–246.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ И ДИФРАКЦИИ МИКРОВОЛН В АНИЗОТРОПНЫХ МАГНИТНЫХ НАНОКОМПОЗИТАХ И 3D-НАНОСТРУКТУРАХ НА ОСНОВЕ ОПАЛОВЫХ МАТРИЦ

Галина Степановна Макеева

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
radiotech@pnzgu.ru

Аннотация. Разработан вычислительный алгоритм решения краевой задачи дифракции для уравнений Максвелла совместно с уравнением Ландау – Лифшица проекционным методом Галеркина. С использованием разработанного вычислительного алгоритма расчета матрицы проводимости автономного блока с каналами Флоке из решения характеристического уравнения получены результаты расчета действительной и мнимой частей комплексного волнового числа квазиобыкновенной волны в зависимости от напряженности поля подмагничивания. С помощью вычислительного алгоритма многоуровневой рекомпозиции автономного блока с каналами Флоке проведено математическое моделирование дифракции волны основного типа на 3D-магнитной наноструктуре в прямоугольном волноводе и сравнение результатов с экспериментом.

Ключевые слова: метод Галеркина, характеристическое уравнение, комплексное волновое число, магнитная наноструктура, многоуровневая рекомпозиция

MATHEMATICAL MODELING OF MICROWAVE PROPAGATION AND DIFFRACTION IN ANISOTROPIC MAGNETIC NANOCOMPOSITES AND 3D NANOSTRUCTURES BASED ON OPAL MATRICES

Galina S. Makeeva

Penza State University, Penza, Russia
radiotech@pnzgu.ru

Abstract. A computational algorithm for solving the boundary value problem of diffraction for the Maxwell equations together with the Landau-Lifshitz equation has been developed using the Galerkin projection method. Using the developed computational algorithm for calculating the conductivity matrix of an autonomous block with Floquet channels (FAB), the results of calculation the real and imaginary parts of the complex wave number of a quasi-extraordinary wave depending on the strength of the bias field are obtained from the solution

of the characteristic equation. Using the computational algorithm of multilevel recomposition of the FAB, mathematical modeling of the diffraction of the fundamental wave on a 3D magnetic nanostructure in a rectangular waveguide was carried out and the results were compared with experiment.

Keywords: Galerkin method, characteristic equation, complex wave number, magnetic nanostructure, multilevel recomposition

1. Построение вычислительного алгоритма решения задачи дифракции для автономного блока с каналами Флоке

Построение математической модели процессов распространения и дифракции волн в магнитных 3D нанокомпозитах базируется на решении 3D краевой задачи дифракции для уравнений Максвелла с электродинамическими граничными условиями, дополненных уравнением движения вектора намагниченности в ферромагнетике в форме Ландау-Лифшица [1].

Электродинамическая модель строится на основе декомпозиционного подхода [2]. На рис. 1 показана электродинамическая модель магнитного 3D-нанокомпозита на основе опаловой матрицы (ОМ) из диэлектрических SiO_2 наносфер (рис. 1,б), содержащего магнитные наночастицы (МНЧ), внедренные в межсферное пространство ОМ, который рассматриваем как квазипериодическую 3D наноструктуру с геометрическими размерами ячейки a, b, c (рис. 1,в).

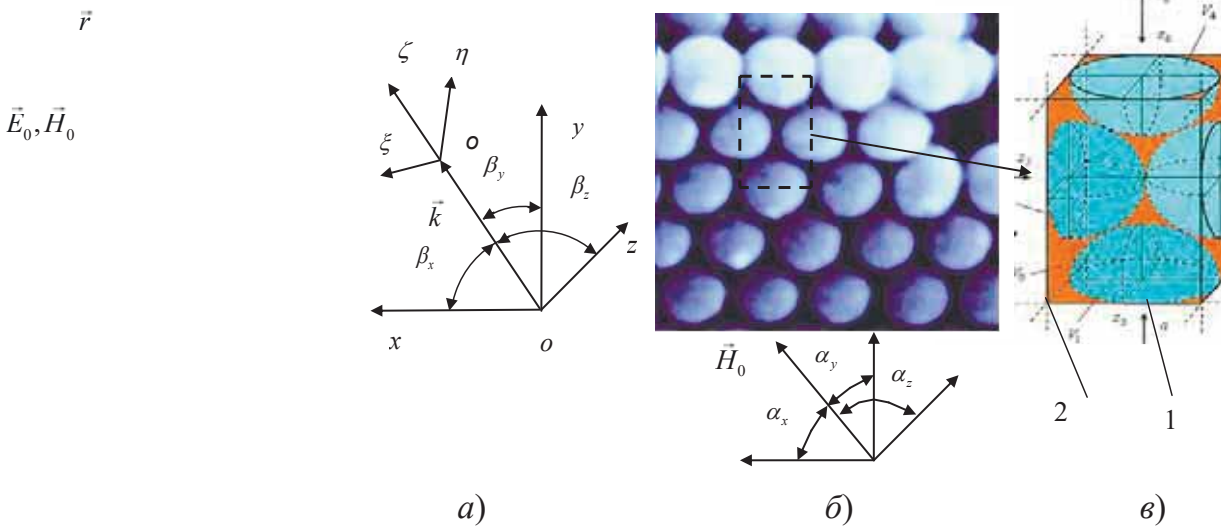


Рис. 1. Электродинамическая модель магнитного 3D нанокомпозита на основе ОМ:

- a – направление распространения волнового процесса с волновым вектором \mathbf{k} ;
- b – периодическая 3D наноструктура и направление поля подмагничивания \vec{H}_0 ;
- $в$ – моделирование ячейки на основе ФАБ: 1 – диэлектрические SiO_2 наносферы, 2 – МНЧ; V_0 – основная область; $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$, – области диэлектрических наносфер; $V_0 - V$ – область МНЧ; $o_\alpha z_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, \dots, 6$) a, b, c – геометрические размеры ячейки (ФАБ)

Область 3D нанокompозита на основе ОМ (рис. 1,б) расчленяется условными границами на подобласти – автономные блоки с виртуальными каналами Флоке на гранях (ФАБ) [3], содержащие диэлектрические SiO₂ наносферы и МНЧ в межсферических полостях ОМ (рис. 1,в)

Автономный блок с каналами Флоке рассматриваем как волноводный трансформатор [2], который состоит из основной области V_0 (прямоугольный параллелепипед) с присоединенными виртуальными каналами Флоке, граничащими с основной областью V_0 входными сечениями S_1, S_2, \dots, S_6 (границ параллелепипеда) (рис. 1,в).

Построение модели магнитного 3D нанокompозита проводим поэтапно. На каждом из этапов считаем, что число N МНЧ сферической геометрии одинакового диаметра d в октаэдрической полости ОМ в ФАБ различно ($N = 1-5$). При этом полагаем фактор заполнения p межсферической полости ОМ магнитным компонентом постоянной величиной.

Дескриптор (в линейном приближении в виде матрицы рассеяния \mathbf{R} или проводимости \mathbf{Y} [2]) ФАБ определяем из решения краевой 3D задачи дифракции, которая формулируется следующим образом.

Электромагнитное поле монохроматической волны удовлетворяет – в области $V_0 - V$ ФАБ (область с МНЧ (рис. 1,в)) – системе уравнений Максвелла совместно с уравнением Ландау-Лифшица [1]:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= i\omega \varepsilon_0 \dot{\vec{E}}, \quad \dot{\vec{E}} = \vec{E} - i \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega}; \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -i\omega \vec{M} - i\omega \mu_0 \vec{H}; \\ -(\omega_r + i\omega) \vec{M} + \omega_r \chi_0 \vec{H} - \gamma \vec{M}_0 \times \vec{H} - \gamma \vec{M}_0 \times \vec{H}_q - \gamma \vec{M} \times \vec{H}_0 &= 0; \\ \operatorname{rot} \vec{M} &= \vec{F}; \\ \operatorname{rot} \vec{F} &= -q^{-1} \vec{H}_q, \end{aligned} \quad (1)$$

где \vec{E}, \vec{H} – векторы напряженности электрического и магнитного полей; \vec{M} – вектор намагниченности среды; \vec{H}_q – эффективное магнитное поле обменного взаимодействия; ε – относительная диэлектрическая проницаемость; σ – электропроводность среды; γ – гиромагнитное отношение; $\omega_r = \alpha \gamma H_0$ – частота релаксации; α – параметр диссипации $\alpha = 6 \cdot 10^{-3}$; χ_0 – статическая восприимчивость; q – константа обменного взаимодействия; \vec{H}_0 – поле подмагничивания; \vec{M}_0 – постоянная намагниченность;

– в области V (диэлектрические наносферы (рис. 1,в)) ФАБ – однородным уравнениям Максвелла:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = i\omega \varepsilon_0 \varepsilon_v \vec{E}, \\ \text{rot } \vec{E} = -i\omega \mu_0 \mu_v \vec{H}, \end{cases} \quad (2)$$

где ε_v, μ_v – относительная диэлектрическая и магнитная проницаемости материала наносфер;

– с электродинамическими граничными условиями, а также условиями неасимптотического излучения на гранях (входных сечениях S_α) ФАБ [4]:

$$a_{k(\alpha)} + b_{k(\alpha)} = \int_{S_\alpha} (\vec{E}_\alpha \times \vec{h}_{k(\alpha)}^*) \cdot d\vec{S}_\alpha + \int_{S_\alpha} (\vec{e}_{k(\alpha)} \times \vec{H}_\alpha^*) \cdot d\vec{S}_\alpha, \quad (3)$$

$$k = 1, 2, \dots, \alpha = 1, 2, \dots, 6,$$

где $\vec{e}_{k(\alpha)}, \vec{h}_{k(\alpha)}$ – электрическая и магнитная компоненты собственных волн каналов Флоке; k – индекс собственной волны; α – номер грани параллелепипеда S_α . Здесь $a_{k(\alpha)}, b_{k(\alpha)}$ – коэффициенты рядов Фурье

$$\vec{E}_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k(\alpha)} \vec{e}_{k(\alpha)}, \quad \vec{H}_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} b_{k(\alpha)} \vec{h}_{k(\alpha)}, \quad (4)$$

которыми представлены электрическое и магнитное поля на гранях ФАБ.

Для решения краевой задачи дифракции применим проекционный метод [5]. В качестве базисных функций $\{\vec{E}_k\}, \{\vec{H}_k\}$ используем системы собственных функций прямоугольного резонатора с однородно-периодическими граничными условиями на гранях. Собственные частоты ω_k и собственные функции $\{\vec{E}_k\}, \{\vec{H}_k\}$ резонатора определяются из решения краевой задачи для уравнений Максвелла:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \vec{H}_k &= i\omega_k \varepsilon_0 \varepsilon_v \vec{E}_k; \\ \text{rot } \vec{E}_k &= -i\omega_k \mu_0 \mu_v \vec{H}_k, \end{aligned} \right\} \quad \text{в области } V_0, \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_k(S_1) &= \vec{E}_k(S_4), \quad \vec{H}_k(S_1) = \vec{H}_k(S_4); \\ \vec{E}_k(S_2) &= \vec{E}_k(S_5), \quad \vec{H}_k(S_2) = \vec{H}_k(S_5); \\ \vec{E}_k(S_3) &= \vec{E}_k(S_6), \quad \vec{H}_k(S_3) = \vec{H}_k(S_6). \end{aligned} \right\} \quad \text{на гранях,}$$

где ε_v, μ_v – относительная диэлектрическая и магнитная проницаемости диэлектрика наносфер. Геометрические размеры прямоугольного резонатора (область V_0) совпадают с геометрическими размерами ФАБ (рис. 1,б)

Запишем систему уравнений (2) в проекционной интегральной форме [5] (используя уравнения Максвелла (5), тождество $\vec{b} \text{rot } \vec{a} - \vec{a} \text{rot } \vec{b} = \text{rot}(\vec{a} \times \vec{b})$ и формулу Остроградского-Гаусса):

$$\begin{aligned}
\oint_S (\vec{H} \times \vec{E}_k^*) \cdot d\vec{S} &= i\omega \varepsilon_0 \int_{V_0} \dot{\vec{E}} \cdot \vec{E}_k^* dV + i\omega_k \mu_0 \int_{V_0} \vec{H} \cdot \vec{H}_k^* dV; \\
\oint_S (\vec{E} \times \vec{H}_k^*) \cdot d\vec{S} &= -i\omega \int_{V_0} \vec{M} \cdot \vec{H}_k^* dV - i\omega \mu_0 \int_{V_0} \vec{H} \cdot \vec{H}_k^* dV - i\omega_k \varepsilon_0 \int_{V_0} \vec{E} \cdot \vec{E}_k^* dV; \\
\int_{V_0} \vec{F} \cdot \vec{E}_k^* dV + i\omega_k \mu_0 \int_{V_0} \vec{M} \cdot \vec{H}_k^* dV &= 0; \\
q^{-1} \int_{V_0} \vec{H}_q \cdot \vec{H}_k^* dV + i\omega_k \varepsilon_0 \int_{V_0} \vec{F} \cdot \vec{E}_k^* dV &= 0; \\
(\omega_r + i\omega) \int_{V_0} \vec{M} \cdot \vec{H}_k^* dV + \gamma \int_{V_0} (\vec{M}_0 \times \vec{H}) \cdot \vec{H}_k^* dV + \gamma \int_{V_0} (\vec{M}_0 \times \vec{H}_q) \cdot \vec{H}_k^* dV + \\
+ \gamma \int_{V_0} (\vec{M} \times \vec{H}_0) \cdot \vec{H}_k^* dV - \omega_r \chi_0 \int_{V_0} \vec{H} \cdot \vec{H}_k^* dV &= 0, \\
S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_6, \alpha = 1, 2, \dots, 6; k = 1, 2, \dots, N,
\end{aligned} \tag{6}$$

где N – число учтенных базисных функций в (5).

Применяя метод Галеркина [5], из проекционной формы (6) и условий неасимптотического излучения (3) получаем:

$$\mathbf{b} = (\mathbf{S}_{21} \cdot \mathbf{S}_{11}^{-1} \cdot \mathbf{S}_{12} + \mathbf{I})^{-1} \cdot (\mathbf{S}_{21} \cdot \mathbf{S}_{11}^{-1} \cdot \mathbf{S}_1 - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{a}, \tag{7}$$

где

$$\mathbf{S}_{12} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}^{(16)} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{S}_{21} = (\mathbf{M}^{(61)} \mathbf{M}^{(62)} \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}).$$

Из (7) следует матрица проводимости ФАБ \mathbf{Y} :

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{S}_{21} \cdot \mathbf{S}_{11}^{-1} \cdot \mathbf{S}_{12} + \mathbf{I})^{-1} \cdot (\mathbf{S}_{21} \cdot \mathbf{S}_{11}^{-1} \cdot \mathbf{S}_1 - \mathbf{I}). \tag{8}$$

где \mathbf{I} – единичная матрица. Элементы матриц $\mathbf{M}^{(11)}$, $\mathbf{M}^{(12)}$, $\mathbf{M}^{(16)}$, $\mathbf{M}^{(21)}$, $\mathbf{M}^{(22)}$, $\mathbf{M}^{(23)}$, $\mathbf{M}^{(27)}$, $\mathbf{M}^{(33)}$, $\mathbf{M}^{(35)}$, $\mathbf{M}^{(44)}$, $\mathbf{M}^{(45)}$, $\mathbf{M}^{(52)}$, $\mathbf{M}^{(53)}$, $\mathbf{M}^{(61)}$, $\mathbf{M}^{(62)}$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
M_{kn}^{(11)} &= i\omega \varepsilon_v \delta_{kn} + i\omega \varepsilon_0 (\dot{\varepsilon} - \varepsilon_v) A_{kn}; \quad M_{kn}^{(12)} = -i\omega_k \delta_{kn}; \quad M_{kl(\beta)}^{(16)} = M_{kl(\beta)}; \\
M_{kn}^{(21)} &= i\omega_k \delta_{kn}; \quad M_{kn}^{(22)} = i\omega \mu_v \delta_{kn} + i\omega \mu_0 (1 - \mu_v) B_{kn}; \quad M_{kn}^{(23)} = i\omega B_{kn}; \\
M_{kl(\beta)}^{(27)} &= -N_{kl(\beta)}; \quad M_{kn}^{(33)} = i\omega_k \mu_0 B_{kn}; \quad M_{kn}^{(35)} = A_{kn}; \quad M_{kn}^{(44)} = q^{-1} B_{kn}; \\
M_{kn}^{(45)} &= i\omega_k \varepsilon_0 A_{kn}; \quad M_{kn}^{(52)} = \gamma X_{kn} - \omega_r \chi_0 B_{kn}; \\
M_{kn}^{(53)} &= \gamma Y_{kn} + (\omega_r + i\omega) B_{kn}; \quad M_{kn}^{(54)} = \gamma X_{kn}; \quad M_{q(\alpha)n}^{(61)} = -U_{q(\alpha)n}; \\
M_{q(\alpha)n}^{(62)} &= -R_{q(\alpha)n},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
M_{k(m)n(m)} &= \int_{S_\beta} (\vec{h}_{l(\beta)}(\omega_m) \times \vec{E}_{k(m)}^*) \cdot d\vec{S}_\beta; \quad N_{k(m)n(m)} = \int_{S_\beta} (\vec{e}_{l(\beta)}(\omega_m) \times \vec{H}_{k(m)}^*) \cdot d\vec{S}_\beta; \\
A_{k(m)n(m)} &= \int_{V_0-V} (\vec{E}_{n(m)} \cdot \vec{E}_{k(m)}^*) dV; \quad B_{k(m)n(m)} = \int_{V_0-V} (\vec{H}_{n(m)} \cdot \vec{H}_{k(m)}^*) dV; \\
X_{k(m)n(m)} &= \int_{V_0-V} (\vec{M}_0 \times \vec{H}_{n(m)}) \cdot \vec{H}_{k(m)}^* dV; \\
Y_{k(m)n(m)} &= \int_{V_0-V} (\vec{H}_{n(m)} \times \vec{H}_0) \cdot \vec{H}_{k(m)}^* dV; \\
U_{q(\alpha)n(m)} &= \int_{S_\alpha} (\vec{E}_{n(m)} \times \vec{h}_{q(\alpha)}^*(\omega_m)) \cdot d\vec{S}_\alpha; \quad R_{q(\alpha)n(m)} = \int_{S_\alpha} ((\vec{e}_{q(\alpha)}(\omega_m) \times \vec{H}_{n(m)}^*)) \cdot d\vec{S}_\alpha; \\
W_{k(m)p(i)r(j)} &= \int_{V_0-V} (\vec{H}_{p(i)} \times \vec{H}_{r(j)}) \cdot \vec{H}_{k(m)}^* dV.
\end{aligned}$$

Компонентами векторов **a**, **b** являются коэффициенты рядов Фурье (4).

2. Результаты моделирования распространения квазинеобыкновенной волны в анизотропном магнитном нанокompозите на основе опаловой матрицы

Математическое моделирование распространения электромагнитных волн в 3D магнитных нанокompозитах на основе ОМ проведено на основе решения характеристического уравнения [6], используя разработанный вычислительный алгоритм расчета матрицы проводимости **Y** ФАБ.

Рассматривая магнитный 3D нанокompозит как квазипериодическую 3D наноструктуру (рис. 1,б), комплексные волновые числа Γ_n электромагнитных волн с компонентами $\vec{E}_n(\xi, \eta)$, $\vec{H}_n(\xi, \eta)$, распространяющихся вдоль оси ζ (рис. 1,а), определяем из решения характеристического уравнения [6]:

$$\Delta(\Gamma_n) = |Y_{AA} - H^{-1} \cdot Y_{BA} + Y_{AB} \cdot H - H^{-1} \cdot Y_{BB} \cdot H| = 0, \quad (9)$$

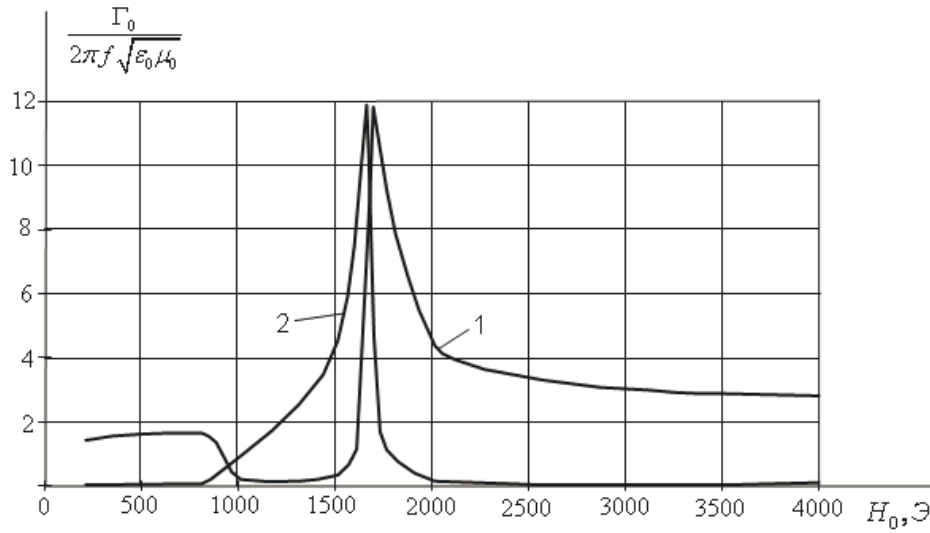
где $\Delta(\Gamma_n)$ – определитель матрицы; $Y_{AA}, Y_{BA}, Y_{AB}, Y_{BB}$ – клетки матрицы проводимости ФАБ $Y = \begin{pmatrix} Y_{AA} & Y_{AB} \\ Y_{BA} & Y_{BB} \end{pmatrix}$ (А, В – индексы входных

сечений ФАБ S_1, S_2, S_3 ; и S_4, S_5, S_6 , соответственно); $H = \begin{pmatrix} h_x & 0 & 0 \\ 0 & h_y & 0 \\ 0 & 0 & h_z \end{pmatrix}$ –

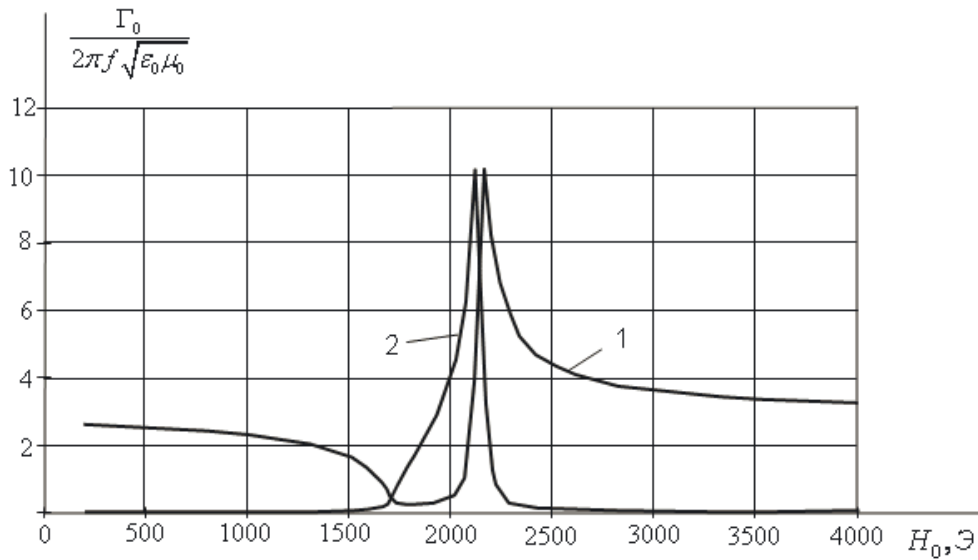
диагональная матрица с элементами $h_{x(lj)} = -i \delta_{lj} \Gamma_n a \cos \beta_x$,

$h_{y(lj)} = -i\delta_{lj}\Gamma_n b \cos\beta_y$, $h_{z(lj)} = -i\delta_{lj}\Gamma_n c \cos\beta_z$; $\beta_x, \beta_y, \beta_z$ – углы, задающие направление распространения волнового процесса (рис. 1,а).

Результаты электродинамического расчета действительной $\text{Re}\Gamma_0$ и мнимой частей $\text{Im}\Gamma_0$ комплексного волнового числа Γ_0 квазиобыкновенной волны (нулевой пространственной гармоники $n = 0$) в зависимости от напряженности поперечного ($\vec{H}_0 = H_0 \vec{x}_0$) поля подмагничивания H_0 на частоте $f = 9,375$ ГГц показаны на рис 2.



а)



б)

Рис. 2. Зависимости действительной и мнимой частей комплексного волнового числа Γ_0 квазиобыкновенной волны от напряженности поля подмагничивания H_0 :

а – $\text{Ni}_{0.7}\text{Zn}_{0.3}\text{Fe}_2\text{O}_4$, ($\alpha = 6 \cdot 10^{-3}$, $4\pi M_S = 5000$ Гс); б – NiFe_2O_4 ($\hat{\epsilon} = 9,5 - i0,3$,

$\alpha = 6 \cdot 10^{-3}$, $4\pi M_S = 3120$ Гс); $f = 9,375$ ГГц;

1 – $\text{Re}\Gamma_0$; 2 – $\text{Im}\Gamma_0$

Магнитный 3D нанокомпозит состоит из наносфер SiO_2 (радиус наносфер $r = 125$ нм; $\varepsilon_v = 4,6 - i3 \cdot 10^{-4}$; $\mu_v = 1$); материал МНЧ $\text{Ni}_{0,7}\text{Zn}_{0,3}\text{Fe}_2\text{O}_4$ (намагниченность насыщения $4\pi M_S = 5000$ Гс, $\mu_0 q = 2,2 \cdot 10^{-9}$ Э·см², $\alpha = 6 \cdot 10^{-3}$); $\text{Ni Fe}_2\text{O}_4$ ($\dot{\varepsilon} = 9,5 - i0,3$, $\alpha = 6 \cdot 10^{-3}$, $4\pi M_S = 3120$ Гс); число N учитываемых в модели МНЧ сферической геометрии диаметра d в полости ОМ в ФАБ $N = 1$ ($d = 50$ нм); фактор заполнения межсферической полости ОМ магнитным компонентом $p = 0,1$.

Из графиков на рис. 2 следует, что максимум резонансного поглощения (положение и ширина резонансного пика мнимой части $\text{Im}\Gamma_0$ комплексного волнового числа Γ_0) квазинеобыкновенной волны определяется значением напряженности поля подмагничивания H_0 , соответствующим частоте поперечного ФМР [7].

3. Результаты моделирования дифракции волны типа H_{10} на магнитной 3D наноструктуре в волноводе и их верификация

Математическую модель для расчета матрицы рассеяния \mathbf{R} магнитной 3D наноструктуры (слой 3D магнитного нанокомпозита на основе ФМР в волноводе) строим на основе декомпозиционной подхода [2]. Слой 3D нанокомпозита (рис. 1,б) расчленим условными границами на ФАБ с магнитными нановключениями (рис. 1,в).

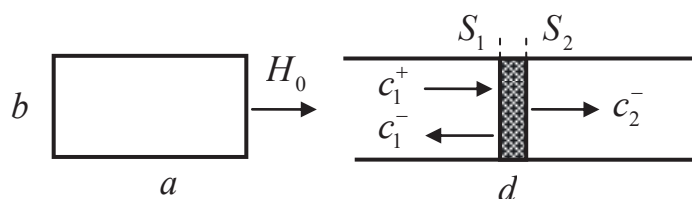


Рис. 3. Дифракция волны H_{10} на магнитной 3D наноструктуре в прямоугольном волноводе: c_1^+ , c_1^- , c_2^- – амплитуды падающей, отраженной и прошедшей волн типа H_{10} ; \mathbf{H}_0 – вектор напряженности поля подмагничивания; S_1, S_2 – входные сечения; $a = 3,6$ мм; $b = 7,2$ мм; $d = 1,0$ мм

В декомпозиционной схеме моделирования магнитной 3D наноструктуры все ФАБ являются одностепенными, что позволяет использовать вычислительный алгоритм многоуровневой рекомпозиции ФАБ [2], который существенно сокращает время расчетов на компьютере. В результате многоуровневой рекомпозиции ФАБ и преобразования каналов Флоке на гранях получаем результирующий ФАБ с двумя входными сечениями (гранями) S_1, S_2 как модель 3D магнитной наноструктуры в волноводе. Далее матрицу проводимости результирующего ФАБ, записанную в базисе собственных волн каналов Флоке,

преобразуем в матрицу проводимости \mathbf{Y} , записанную в базисе собственных волн прямоугольного волновода [2]. Затем матрицу проводимости \mathbf{Y} результирующего ФАБ преобразуем в матрицу рассеяния $\mathbf{R} = (\mathbf{I} + \mathbf{Y})^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{Y})$ [2].

Из матрицы рассеяния \mathbf{R} 3D магнитной наноструктуры в волноводе определяем амплитуды c_1^- , c_2^- отраженной и прошедшей волн типа H_{10} (амплитуда падающей волны H_{10} принята равной $c_1^+ = 1$). Коэффициент прохождения волны H_{10} определяется как $k_{\text{пр}} = \frac{c_2^-}{c_1^+}$.

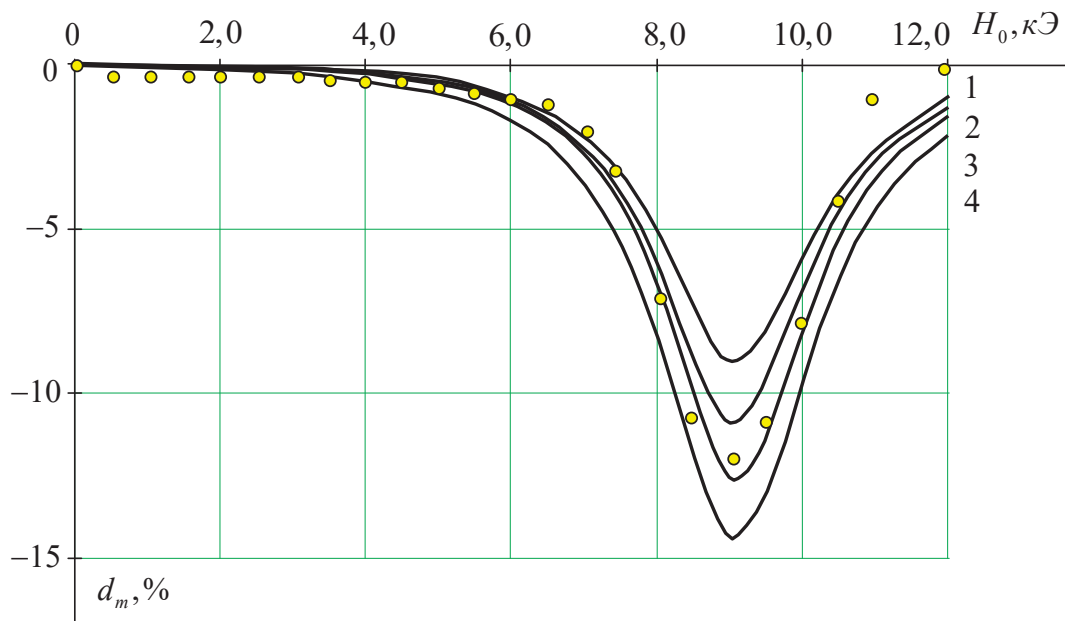
Получены результаты математического моделирования дифракции волны основного типа H_{10} на 3D магнитной наноструктуре в прямоугольном волноводе (рис. 3) в миллиметровом диапазоне волн.

Проведем сравнение результатов моделирования с экспериментом [8, 9].

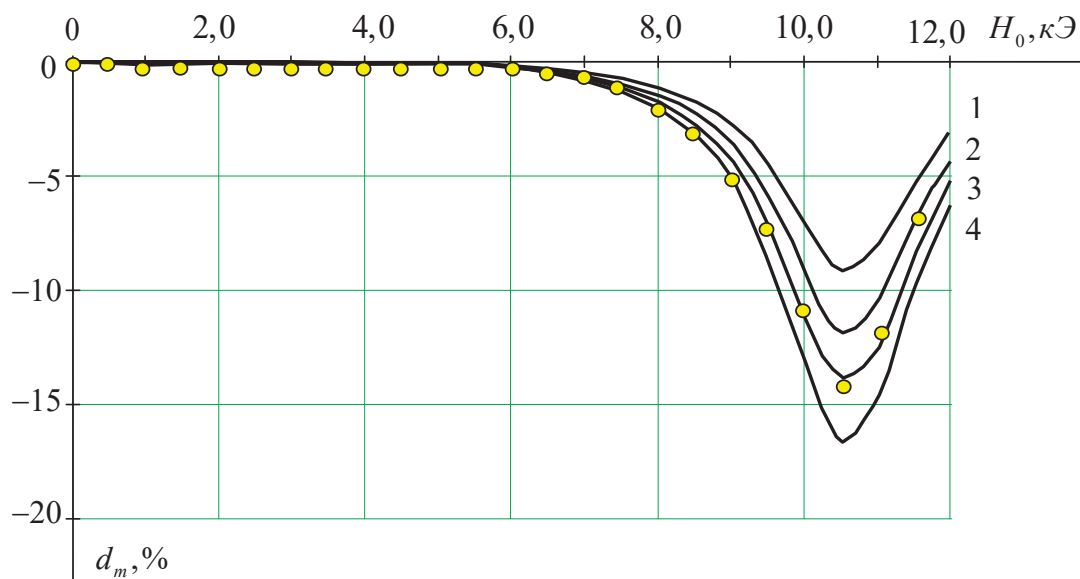
На графиках рис. 4 приведены результаты расчета зависимостей относительного коэффициента прохождения d_m волны H_{10} через слой магнитного нанокompозита в волноводе от напряженности поля подмагничивания H_0 на частотах $f_1 = 26$ ГГц и $f_2 = 30$ ГГц для различных значений фактора заполнения p межсферической полости ОМ магнитным компонентом. Относительный коэффициент прохождения определялся как $d_m = \frac{k_{\text{пр}}^H - k_{\text{пр}}^0}{k_{\text{пр}}^0}$, где $k_{\text{пр}}^0$ – коэффициент прохождения при $H_0 = 0$, $k_{\text{пр}}^H$ – коэффициент прохождения при приложении поля подмагничивания ($H_0 \neq 0$).

3D магнитная наноструктура на основе ОМ из наносфер SiO_2 ($r = 125$ нм, $\varepsilon_v = 4,6 - 4 \cdot 10^{-4}$, $\mu_v = 1$); в модели фактор заполнения p магнитным компонентом изменялся в пределах 30–60 %; материал МНЧ $\text{Ni}_{0.7}\text{Zn}_{0.3}\text{Fe}_2\text{O}_4$, ($4\pi M_S = 5000$ Гс), $\mu_0 q = 2,2 \cdot 10^{-9} \text{ Э} \cdot \text{см}^2$, $\dot{\varepsilon} = 9,5 - i0,3$, $\alpha = 0,1$).

Результаты математического моделирования получены методом ФАБ при $N_{V_0} = 5$ (число учитываемых пространственных гармоник в объеме V_0 ФАБ); $N_{S_\alpha} = 1$ (число учитываемых пространственных гармоник на гранях ФАБ). На сечениях S_1, S_2 результирующего ФАБ число учитываемых пространственных гармоник выбиралось равным $N_{S_{1,2}} = 5$. Дальнейшее расширение базисов практически не изменяло рассчитанных значений относительного коэффициента прохождения d_m .



а)



б)

Рис. 4. Зависимости относительного коэффициента прохождения волны типа H_{10} через 3D магнитную наноструктуру в волноводе от напряженности поля подмагничивания H_0 :

$a - f_1 = 26$ ГГц; $б - f_2 = 30$ ГГц;

кривая 1 – 30 % заполнение межсферических полостей ОМ;

2 – 40 %; 3 – 50 %; 4 – 60 %; ● – эксперимент [8]

На рис. 4 также показаны результаты эксперимента [8]. Наилучшее совпадение теоретических и экспериментальных результатов на частотах $f_1 = 26$ ГГц и $f_2 = 30$ ГГц наблюдается для магнитных

наноккомпозитов с 50 % заполнением магнитным компонентом межсферических полостей ОМ.

Совпадение результатов математического моделирования с экспериментом дает гарантии достоверности результатов, полученных методом ФАБ. Необходимо отметить, что магнитный 3D наноккомпозит приходится расчленять на большое число ФАБ. Это приводит к большим затратам компьютерного времени: одна точка считается несколько десятков минут (в зависимости от мощности процессора). Поэтому следует использовать многопроцессорные вычислительные комплексы. Время расчетов можно существенно сократить, если для магнитного 3D наноккомпозита обоснованно ввести эффективные значения компонентов тензоров магнитной и диэлектрической проницаемостей [10, 11].

Список литературы

1. Голованов О. А., Макеева Г. С. Метод автономных блоков с магнитными нановключениями и каналами Флоке для математического моделирования магнитных наноструктур с учетом обмена и граничных условий // Радиотехника и электроника. 2009. Т. 54, № 12. С. 1345–1352.
2. Никольский В. В. Декомпозиционный подход к задачам электродинамики. М. : Наука, 1983. 304 с.
3. Голованов О. А. Автономные блоки с виртуальными каналами Флоке и их применение для решения прикладных задач электродинамики // Радиотехника и электроника. 2006. Т. 51, № 12. С. 1423–1430.
4. Голованов О. А. Численный алгоритм решения задач дифракции для волноведущих устройств СВЧ с нелинейными средами // Радиотехника и электроника. 1990. Т. 35, № 9. С. 1853–1863.
5. Никольский В. В. Проекционные методы в электродинамике // Сборник научно-методических статей по прикладной электродинамике. М. : Высш. шк., 1977. С. 4–23.
6. Макеева Г. С., Голованов О. А. Математическое моделирование распространения электромагнитных волн в наноструктурированных гиромангнитных средах методом автономных блоков с магнитными нановключениями и каналами Флоке // Радиотехника и электроника. 2009. Т. 54, № 12. С. 1455–1459.
7. Гуревич А. Г., Мелков Г. А. Магнитные колебания и волны. М. : Наука, 1994. 464 с.
8. Ринкевич А. Б., Перов Д. В., Самойлович М. И. [и др.]. Частотная зависимость коэффициента поглощения миллиметровых волн в 3D наноккомпозитах на основе опаловых матриц // Радиотехника и электроника. 2009. Т. 54, № 8. С. 1–5.
9. Ustinov V. V., Rinkevich A. B., Perov D. V. [et al.]. Anomalous magnetic antiresonance and resonance in ferrite nanoparticles embedded in opal matrix // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. 2012. Vol. 324. P. 78–82.
10. Pardavi-Horvath M., Makeeva G. S., Golovanov O. A. Electrodynamic Model for Low Loss Microwave Nanocomposite Magnets Using Autonomous

Blocks with Floquet Channels // Journal of Applied Physics. 2009. Vol. 105, № 7. P. 07C104–07C104-2.

11. Pardavi-Horvath M., Makeeva G. S., Golovanov O. A. Interactions of Electromagnetic Waves with 3D Opal-Based Magnetophotonic Crystals at Microwave Frequencies // Transaction on Magnetics. 2011. Vol. 47, № 2. P. 341–344.

5. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ, ЭКОЛОГИИ, БИОЛОГИИ, ИММУНОЛОГИИ

УДК 021.271-614.258.1

АСТРОФИЗИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОФИЛАКТИКИ В ПЕРСОНИФИЦИРОВАННОЙ МЕДИЦИНЕ

*Михаил Иванович Гринцов¹, Наталья Сергеевна Бофанова²,
Юлия Александровна Князькина³*

^{1,2,3} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹ grintsovM@mail.ru

Аннотация. Категория персонифицированной медицины предполагает персонифицированные технологии диагностики, лечения и реабилитации. Технологии предотвращения рождения детей с пороками развития в эпилептологии обсуждаются, как правило, в рамках родового травматизма. Мета-анализ случаев эпилепсии, в основе которой лежит мутация в гене ТВС 1 D24 (с.641G>A; pArg214 His), показывает, что неучет механизмов мутагенеза относительно случаев эпилепсии, изложенных в теории О. Барсукова и В. Фортова, приводит к неверным заключениям. Поездки в германские клиники, где обращается внимание на характер мутаций, но игнорируются физические механизмы этих мутаций, клинически малорезультативны. Применение технологии предотвращения эпилепсии и иных врожденных пороков развития должно начинаться заранее – до момента зачатия. Эпилепсию и судорожные синдромы целесообразно предотвращать при помощи технологии редактирования эфемерид, чем лечить.

Ключевые слова: эпилепсия, мутации генов, технология персонального предотвращения

ASTROPHYSICAL MODELS OF PREVENTION IN PERSONALIZED MEDICINE

Mihail I. Grintsov¹, Natalia S. Bofanova², Yulia A. Knyazkina³

^{1,2,3} Penza State University, Penza, Russia

¹ grintsovM@mail.ru

Abstract. The category of personalized medicine (PM) prefers personalized diagnostic, treatment and rehabilitation technologies. Technologies for preventing the birth of children with malformations of epileptology are discussed, as a rule, within the framework of birth traumatism. A meta-analysis of cases of epilepsy, which are based on a mutation in the TVS 1 D24 gene (p.641G>A; pArg214 His)

shows that not taking into account the sign of a mutation without taking into account the causes of epilepsy set forth in the theories of O. Barsukov and V. Fortov leads to incorrect conclusions. Hopes for trips to German clinics, where attention is paid to the nature of mutations, but the physical mechanisms of these mutations are ignored, are clinically of little effect. The application of technology to prevent epilepsy and other congenital malformations should begin ahead of time – before the time of conception. Epilepsy and seizures are easier to prevent with ephemeris editing technology than to cure.

Keywords: epilepsy, gene mutations, personal prevention technology

Состояние проблемы. Категория персонифицированной медицины (ПМ) предполагает персонифицированные технологии диагностики, лечения и реабилитации. Технологии персонифицированного предотвращения рождения детей с эпилепсией в литературе обсуждаются в рамках подового травматизма. Исключением можно считать идею Академика РАН К. Г. Скрябина, который провозгласил: «С открытием технической возможности редактирования генома возникла реальная перспектива моделирования «дизайнерских детей»: ребёнок может и должен быть здоровым, красивым и талантливым». К сожалению, Ак. РАН К. Г. Скрябин не успел доработать идею до практической технологии.



Цель исследования. Изучить возможность создания практической технологии, которая могла бы предотвращать рождение детей с эпилепсией или судорожными синдромами.

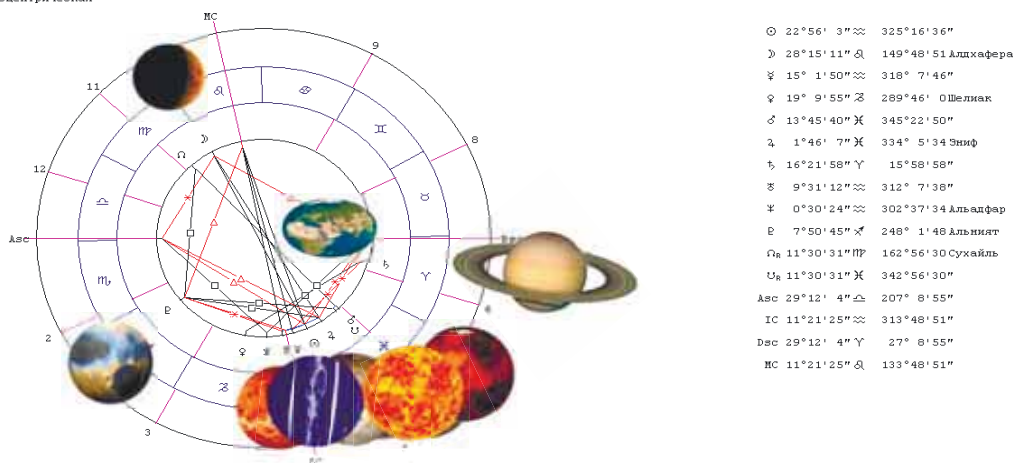
Материал и методы. Проведен метаанализ клинических случаев эпилепсии и судорожных синдромов, приведенных в [1] через призму механизмов патогенеза, представленных в теории мутагенеза [2, 3 и 7]. Группу лиц с эпилепсией и судорожными синдромами сравнивали с группой здоровых и талантливых ≈ 250 исторических лиц. Сравнительный анализ «здоровых и талантливых» с больными с различными вариантами детской эпилепсии показал различия в их моментах времени зачатия. Контрольной группой были «успевающие студенты университета» – порядка 120 лиц. Простой и наглядной системой координат, в которой мы изучали пациентов (день, месяц, год и час рождения, координаты, мутировавшие гены, установленный диагноз), принята эклиптическая, а также Гринвичская системы координат. Это выглядит так (см. фиг. 1, 2, 3 и др.).

Состояние проблемы. Открытие четы Франсуазы и Мишеля Гокленов (Франция ≈ 1960 г): «Расположение и сочетание генов

человека коррелирует /связано с расположением планет Солнечной системы в момент времени зачатия, а момент времени рождения ребёнка корреспондирует с обстоятельствами рождения родителей и расположением их генов. Другими словами: конфигурация генов коррелирует с конфигурацией планет в момент зачатия [8]. Ни в одном отечественном руководстве по гене тике или репродуктологии открытие четы Гокленов не упоминается. Более того, в отечественной генетике открытие четы Гокленов решительно игнорируются. В Пензенском педагогическом институте, где д.ф-м.н. проф. О. А. Барсуковым была выдвинута теория мута генеза, не учитывать его теорию относительно предотвращения рождения детей с пороками развития было бы неверным [4–7, 9–13].

Результаты метаанализа. Клинический случай 4, который приводят Пылаева О. А. и Мухин К. Ю. (1) Пациент И. Г., 12.02.1998. наблюдался в институте детской неврологии и эпилепсии ИДНЭ им. Свт. Луки с возраста 8 лет. Проведенное дообследование в Германии на предмет эпилептологической панели генов выявило гетерозиготную мутацию в гене TBC 1 D24 (с.641G > A; pArg214 His). Мутации в данном гене ассоциированы по базе OMIM с эпилептической энцефалопатией младенческого возраста. ...Больному было определено персонализированное лечение: Ламотриджин (Сейзар) 200 мг 2 раза в день, Перампанел (Файкомпа) 6 мг на ночь, Сультиам 150 мг 2 раза в день. Несмотря на подобранный персональный курс обследования и лечения течение эпилепсии оставалось резистентным, приступы продолжались. Трудоспособность пациента не восстановлена.

Пациент И.Г., дата рождения 12 февраля 1998г. Москва (или обл.).
Планишус
Топоцентрическая

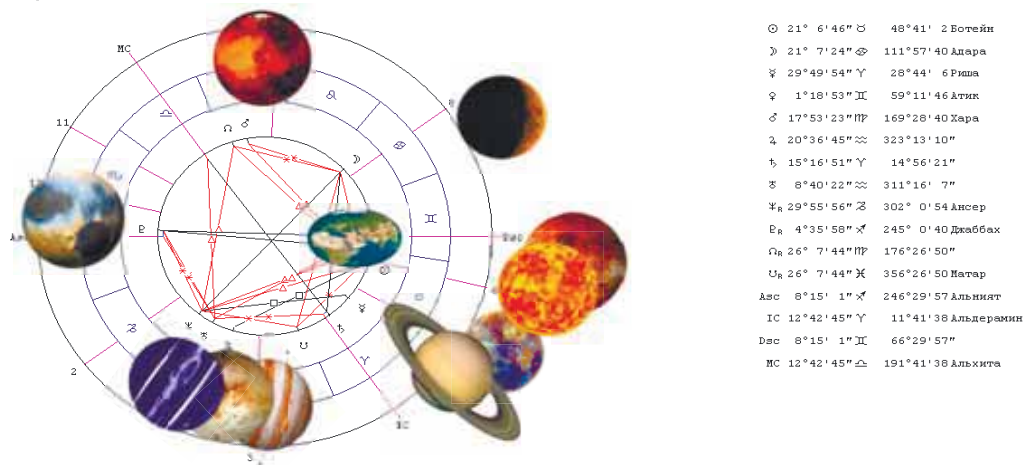


Фиг. 1

Пациент И. Г. родился 12 февраля 1998 г. в Москве или области. (по данным ректификации в 6:00). Анализ клинической ситуации с точки зрения теории мутагенеза О. А. Барсукова и В. Е. Фортова показывает, что момент времени появления ребёнка на свет был \approx в 6:00.

В этот период времени окно вторжения энергии галактических космических лучей (ГКЛ) было открытым, о чём свидетельствует дуговое расстояние между Сатурном и Плутоном: более 210° дуговых градусов. При рождении Д-з: эпилепсия с серийными тоническими аксиальными, миоклоническими приступами, атипичными абсансами и билатеральными тонико-клоническими приступами.

Пациент И.Г. зачат в мае (от 12 до 15) 1997г. в Москве (или обл.).
Плацидус
Топоцентрическая

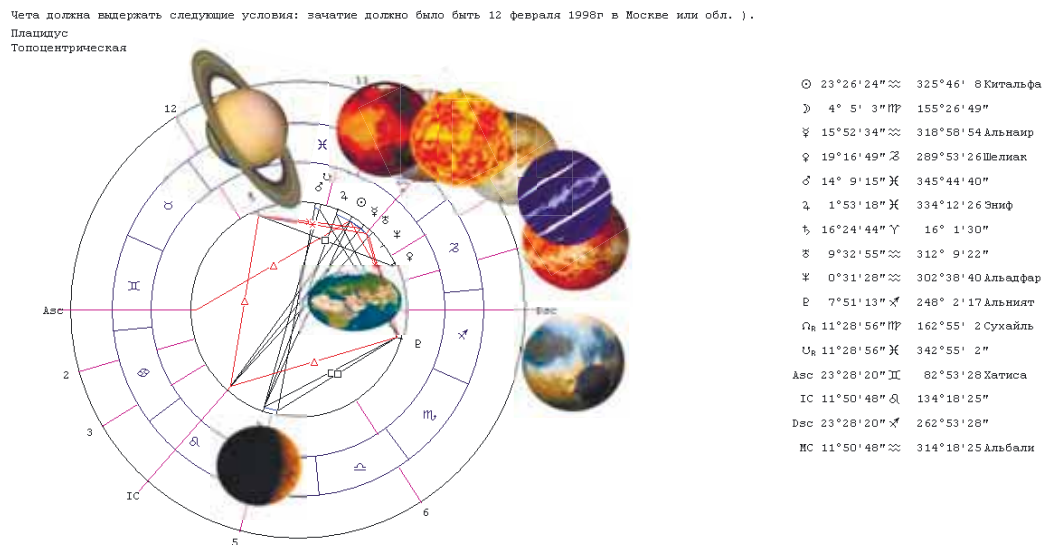


Фиг. 2

Вычисленная по «золотому стандарту пребывания ребёнка в лоне матери в 273 суток» дата зачатия пациента И. Г. \approx от 12 до 15 мая 1997 г. Комментарий: Зачат в период при «открытом окне вторжения вещества и высоких плотностей ионизирующей энергии галактических космических лучей (ГКЛ), что соответствует дуговому расстоянию $\approx 60^\circ$ дуговых градусов между Плутоном и Марсом. Этот отрезок эклиптики был открыт Северному полюсу, через который на Землю вторгается вещество и энергия ГКЛ. Резюме: обследован в Москве в институте детской неврологии и эпилепсии, дообследован в Германии. Установлен окончательный диагноз. Подобран «персональный» курс противосудорожных препаратов. Течение заболевания резистентное. Приступы продолжаются. Работоспособность нарушена.

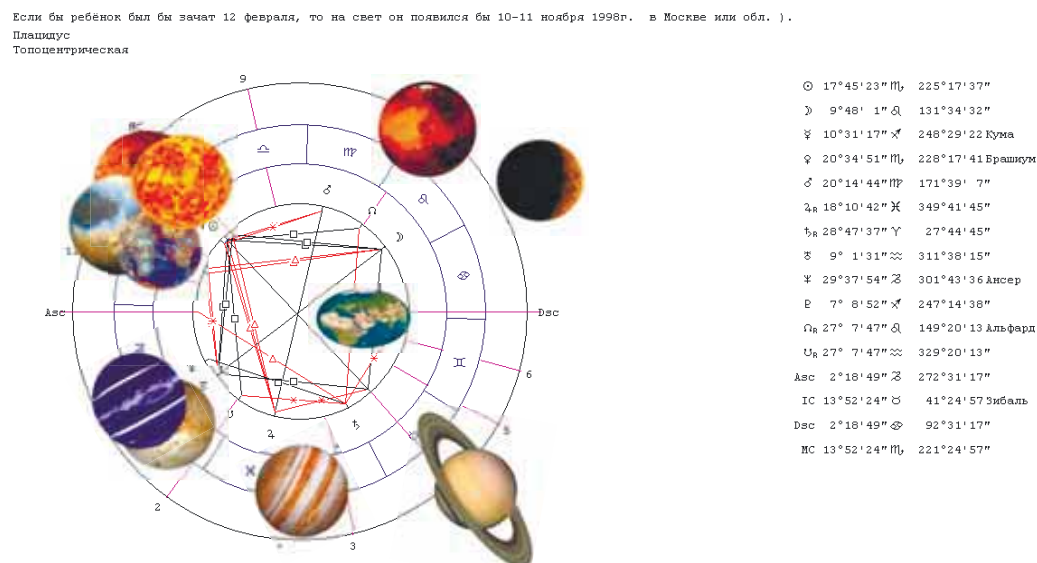
Предположим, что та же чета, удручённая трудноизлечимым заболеванием первого ребёнка, ознакомившись с идеей академика РАН К. Г. Скрыбина, перед нами поставила вопрос: найдите способ, определите для нас любой вариант вынашивания ребёнка с единственным условием: ребёнок должен быть здоровым и талантливым. Мы согласны выполнять все ваши вычисления и клинические рекомендации. Возможно ли решение этого вопроса? С точки зрения теории мутагенеза О. А. Барсукова и В. Е. Фортова – это возможно. Более того – сделать это несложно. Для этого изучаем менструальный цикл женщины, определяем момент созревания яйцеклетки и овуляции, изучаем

астрофизическую конфигурацию и делаем простые вычисления и сопоставления. Окончательно вычисленная дата для зачатия здоровым и талантливым ребёнком могла бы выглядеть так:



Фиг. 3

Для зачатия и вынашивания здорового ребёнка чета должна была бы его зачать в Москве или Московской области ≈12 февраля 1998 г., но не в 4:00, а в период с ≈16:00 до ≈19:30. Оптимальное время для зачатия –12 февраля 1998 г. было в ≈18:00. Если бы эти условия четой были бы выдержаны, то на свет ребёнок появился бы ≈10–11 ноября 1998 г. здоровым и талант ливым. На эклиптической сетке координат это выглядит так:



Фиг. 4

Если бы ребёнок был бы зачат ≈ 12 февраля 1998 г., то на свет он появился бы ≈ 10 –11 ноября 1998 г. здоровым и талантливым. Комментарий: день рождения был бы при закрытом окне вторжения энергии ГКЛ. Об этом свидетельствует расположение Солнца, Венеры, Плутона и Меркурия, которые образовали «закрытое окно», предотвращающее вторжение вещества и высоких плотностей энергии ГКЛ через Северный полюс эклиптики, предотвращающий поражение гамет родителей и образованной зиготы.

Метаанализ случая. Поскольку к моменту дообследования в Германской клинике (что должно было свидетельствовать о крайне высоком уровне обследования и лечения) теория мутагенеза О. А. Барсукова (2011) и В. Е. Фортова (2013) уже были обнародованы и стали общедоступными, и, несмотря на то, что в Германии были идентифицированы мутировавшие гены TBC1 D24 (с. 641G > A; pArg214 His), на анализ предполагаемых механизмов мутагенеза в Германской клинике был проигнорирован. На теорию мутагенеза [2, 3, 7] в Германской клинике внимания не обратили. В Германии, где Вальтером Боте были открыты космические лучи, где К. Рентгеном открыты X-лучи, где проводились исследования М. Планка (Нобелевские премии)... Это в Германском духе. Такое бывает. На фиг. 4 показано, что если бы были учтены положения теории мутагенеза [2, 3 и 7], то в момент времени зачатия должно было быть исключено вторжение энергии ГКЛ. На вопрос: как это можно сделать? ответ простой – манёвром момента времени образования зиготы.

1. В группе «здоровых и талантливых» исторических лиц установлена достоверная зависимость между астрономическими моментами времени зачатия и рождения, когда на пространствах эклиптики были образованы конфигурации, предотвращавшие вторжение энергии галактических космических лучей (ГКЛ) на Землю в момент зачатия. Такая конфигурация истолковывалась как «закрытые ворота вторжения высоких плотностей энергии» галактических космических лучей сквозь магнитосферу и атмосферу Земли и в связи с этим были образованы астрофизические условия невозможности разрушения генома гамет родителей, генома зиготы до момента плацентации. Другими словами: геномы гамет родителей и вновь образованной зиготы не были разрушены по той причине, что в момент свободного полёта их до момента времени плацентации эклиптическое окно вторжения энергии галактических космических лучей было закрыто группами планет. Покрытие источника излучения происходило планетами по общеизвестным астрономическим законам, что соответствует астрономическому явлению под названием «покрытие звёзд астероидами или планетами».

2. В группе детей с разными формами эпилепсии и судорожными синдромами установлена достоверная зависимость между астрономическими моментами времени их зачатия и рождения с образованием на эклиптике конфигурации эфемерид/планет в виде «открытых ворот вторжения высоких плотностей энергии» галактических космических лучей сквозь магнитосферу и атмосферу Земли и в связи с этим появление возможности разрушать геном гамет родителей, геном зиготы до момента плацентации. Другими словами: геномы гамет родителей и вновь образованной зиготы могли быть разрушены по той причине, что в момент свободного полёта их до момента времени плацентации эклиптическое окно вторжения энергии галактических космических лучей было открыто.

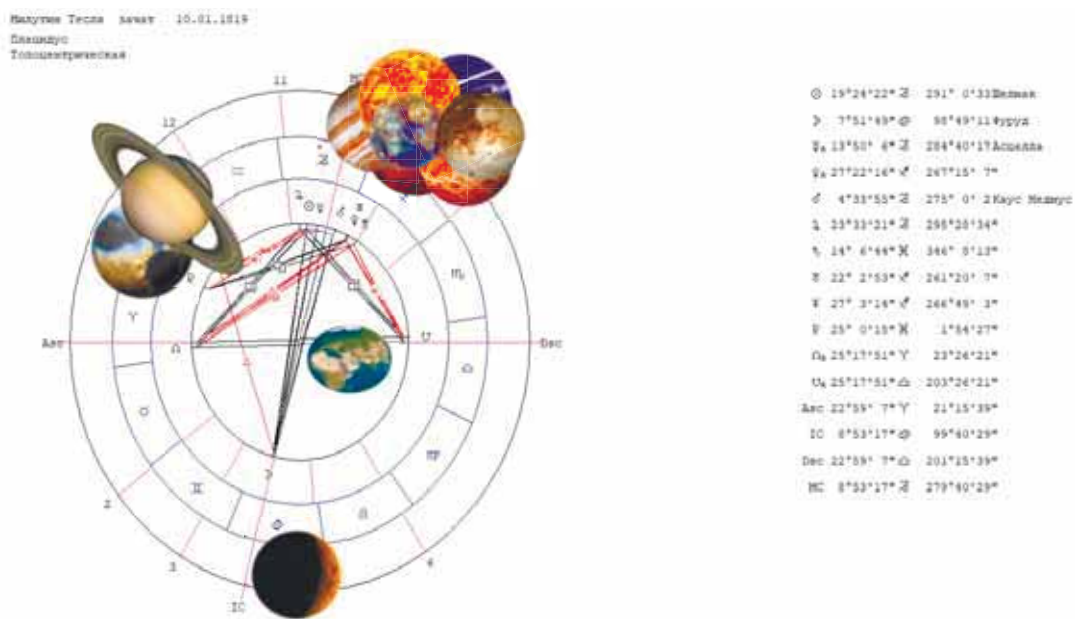
3. Контрольная группа «успевающих студентов университета» является гетерогенной: одни талантливые студенты соответствуют гипотезе О. А. Барсукова и В. Е. Фортова в том плане, что они являются талантливыми, и, предположительно, у них не будут распознаны заболевания, которые проявляются в зрелом или старческом возрасте, не заболеют онкопатологией. У некоторых студентов имеются указания на то, что они могут заболеть генетической патологией.

4. Достоверные связи между рождением (и зачатием) здоровых и талантливых (см. фиг. 5) с конфигурацией планет на эклиптике позволяет клиническому генетику и репродуктологу предсказывать о характере будущих детей и «выдавать рекомендации» той чете, которая приняла решение продлить свой род «только здоровыми и только талантливыми» на основании визуального просмотра/анализа конфигураций эфемерид.

5. Используя технологию «редактирования не генома, а эфемерид» представляется возможным формировать здоровое и талантливое поколение в обществе, не проводя анализа неисчислимого числа нозологических форм и их разновидностей.

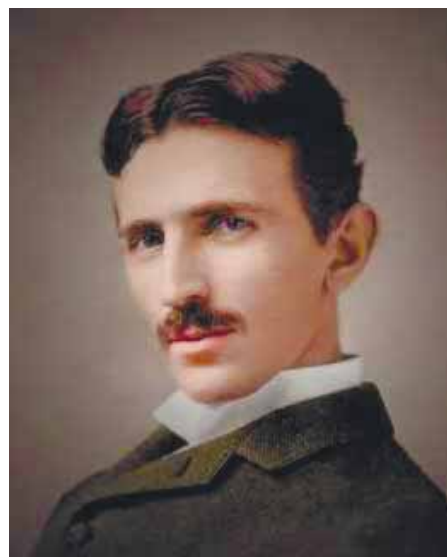
6. Согласно теории О. А. Барсукова и В. Е. Фортова, одной из наиболее важных причин мутагенеза генома у живых организмов на Земле являются неземные, а космические факторы.

7. Клинические эффекты астрономического явления под названием «покрытие звёзд астероидами и/или планетами описываются теорией канцерогенеза О. А. Барсукова и В. Е. Фортова. Как пример передачи талантливости и других качеств поколению приводим космограмму зачатия отца Николы Теслы Милутина Тесты.



Фиг. 5.

Милутин (отец) Тесла зачат ≈ 10 января 1819 г. при астрономической сверхплотной конфигурации из 7 планет. Свою гениальность передал сыну Николе (фотография Н. Теслы помещена на правой части космограммы). Те, которые были зачаты в такие астрофизические моменты времени, преобразили мир, понимали проблемы так ясно, как будто они открыты Богом. Оказалось, что они появлялись на свет по законам астрофизики. На клиническом материале мы повторно «перезоткрыли» давно открытое явление французской исследовательской четой Франсуазы и Мишеля Гоклен [8].



Выводы.

1. Категория персонифицированной медицины (ПМ) должны предполагать в первую очередь технологии персонифицированного предотвращения/профилактики рождения детей с врожденными пороками развития (в том числе и с эпилепсией и судорожными синдромами).

2. Метаанализ случаев эпилепсии, в основе которой лежит мутация в гене TBC1D24 (c.641G > A; pArg214 His) показывает, что учёт механизмов мутагенеза из теории О. Барсукова и В. Фортова позволяет не только распознавать причину патологии, но и проводить эффективные профилактические вычисления, предотвращающие рождение детей с эпилепсией.

3. Применение теории канцеромутагенеза в предотвращении / профилактике эпилепсии и иных врождённых пороков развития должно начинаться не с момента распознавания характера патологии, а з'агода – до момента време ни зачатия.

4. Эпилепсию можно предотвращать при помощи технологии редактирова ния эфемерид – вычислять точные даты и время суток зачатия и сопоставлять с конфигурацией планет, которая является в одних случаях «окном» вторжения энергии ГКЛ, а в других случаях «щитом», предотвращающим втор жение энергии ГКЛ.

5. Если общество сможет наладить «организацию» зачатия только здоровых и только талантливых, что намного проще и дешевле лечения, то можно будет отказаться от затратных технологий изучения неисчислимого количества патологических состояний.

Список литературы

1. Пылаева О. А., Мухин К. Ю. Эффективность и переносимость Сейзара (Ламотриджин) в лечении эпилепсии (опыт Института детской неврологии и эпилепсии им. Свт. Луки) // Русский журнал детской неврологии. 2020. Т. 15, № 2. С. 17–41.

2. Барсуков О. А. Основы физики атомного ядра. Ядерные технологии. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2011. 559 с.

3. Фортов В. Е. Физика высоких плотностей энергии. М. : Физматлит, 2013. 710 с.

4. Исакова П. Б. Особенности структуры течения в магнитных катаклизмических переменных : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.03.02. М., 2018. 15 с.

5. Чехонин В. Знать – значит выжить // В мире науки. 2022. № 9/10. С. 19–23.

6. Аптекарев А. И. В поисках двойника // В мире науки. 2022. № 1-2. С. 84–89.

7. Овсянников В. А. Энергетическая модель канцерогенеза // Вопросы онкологии. 2005. Т. 51, № 1. С. 34–40.

8. Gauquelin M. Astrology and science. 1970.

9. Гринцов М. И., Гринцова В. М. Врождённые пороки развития у детей и подростков. Пенза, 2021. 145 с.

10. Инге-Вечтомов С. Г. Экологическая генетика. Что это такое? // Соросовский образовательный журнал. 1998. № 2. С. 59–65.

11. Кольцов Н. К. Очерки, статьи, документы. М. : Научный мир, 2021. 598 с.

12. Заваденко Н. Н., Немкова С. А. Нарушения развития и когнитивные дисфункции у детей с заболеваниями нервной системы. М., 2016. 359 с.

13. Орлов И. О. Биологические риски как потенциальный фактор космических угроз // Поиск. 2019. № 3-4. С. 1545–1546.

14. Фомин Г. С., Фомина О. Н. Воздух. М., 2002. 422 с.

15. Федоренко Б. С. Радиобиологические эффекты корпускулярных излучений. М. : Наука, 2006. 189 с.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭПИЛЕПТИЧЕСКИХ РАЗРЯДОВ В НЕЙРОННЫХ СЕТЯХ

*Мария Андреевна Кутыркина¹,
Татьяна Фанадовна Мамедова²*

^{1,2} Национальный исследовательский Мордовский государственный
университет имени Н. П. Огарёва, Саранск, Россия

¹ mariahkutyrkina@yandex.ru, ² mamedovatf@yandex.ru

Аннотация. Посвящена изучению механизмов возникновения эпилептических разрядов в нейронных сетях головного мозга. Результаты численного эксперимента показали наличие эпилептиформных затухающих колебаний мембранного потенциала, которые характеризуются уменьшением амплитуды и продолжительности пик-волн с течением времени.

Ключевые слова: модель Ходжкина – Хаксли, мембранный потенциал, эпилепсия, ген SCN1A

MATHEMATICAL MODELING OF EPILEPTIC DISCHARGES IN NEURAL NETWORKS

Maria A. Kutyrkina¹, Tatiana F. Mamedova²

^{1,2} National Research Mordovian State University
named after N. P. Ogarev, Saransk, Russia

¹ mariahkutyrkina@yandex.ru, ² mamedovatf@yandex.ru

Abstract. This scientific article is devoted to the study of the mechanisms of occurrence of epileptic discharges in the neural networks of the brain. The results of a numerical experiment showed the presence of epileptiform damped oscillations of the membrane potential, which are characterized by a decrease in the amplitude and duration of peak waves over time.

Keywords: Hodgkin – Huxley model, membrane potential, epilepsy, SCN1A gene

Введение

Эпилепсия – это неврологическое заболевание, характеризующееся повторяющимися эпилептическими приступами, вызванными синхронной и непропорциональной активностью нейронных сетей в головном мозге. Понимание механизмов, лежащих в основе эпилептических разрядов, является важным шагом для разработки новых методов лечения и улучшения жизни пациентов, страдающих от этого заболевания [1].

Математическое моделирование нейронных сетей является мощным инструментом для изучения динамики и функционирования этих сетей. Оно позволяет исследовать взаимодействие между нейронами, механизмы синаптической пластичности и влияние различных факторов на активность нейронных сетей. В частности, моделирование эпилептических разрядов в нейронных сетях позволяет нам лучше понять, как возникают и распространяются эти разряды и какие механизмы лежат в их основе.

При эпилепсии происходят непредсказуемые и повторяющиеся эпизоды нейронной гиперактивности в головном мозге. Эти эпизоды, называемые эпилептическими приступами, могут быть вызваны различными факторами, такими как генетические мутации, травмы головы, инфекции, опухоли или другие нарушения мозга.

Во время эпилептического приступа, возникает синхронная и неконтролируемая активация большого количества нейронов в определенной области мозга. Это приводит к возникновению электрических разрядов, которые распространяются по мозгу и могут вызывать различные симптомы, включая судороги, потерю сознания, изменение поведения, восприятия или памяти.

Мутации в гене SCN1A, кодирующем натриевый канал Nav1.1, являются одной из самых распространенных причин генетически обусловленных форм эпилепсии. Обычно мутации приводят к увеличению проводимости натриевого ионного канала, а это, в свою очередь, усиливает возбудимость нейронов и способствует возникновению эпилептических приступов [1].

Описание модели

Для моделирования динамики нейронных сетей была использована модель Ходжкина-Хаксли, которая описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_m \frac{dV}{dt} = I_{ext} + I_{syn}(t) - G_{Na} - G_K - G_L; \\ \frac{dm}{dt} = \alpha(V)(1 - m) - \beta_m(V)m; \\ \frac{dh}{dt} = \alpha_h(V)(1 - h) - \beta_h(V)h; \\ \frac{dn}{dt} = \alpha_n(V)(1 - n) - \beta_n(V)n; \end{array} \right.$$

$$\alpha_m(V) = \frac{0.1(25 - V)}{\frac{\exp(25 - V)}{10} - 1};$$

$$\begin{aligned}
\beta_m(V) &= 4 \exp\left(\frac{-V}{18}\right); \\
\alpha_h(V) &= 0.07 \exp\left(\frac{-V}{20}\right); \\
\beta_h(V) &= \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{30 - V}{10}\right)}; \\
\alpha_n(V) &= \frac{0.01(10 - V)}{1 + \exp\left(\frac{10 - V}{10}\right)}; \\
\beta_n(V) &= 0.125 \exp\left(\frac{-V}{80}\right); \\
G_{Na} &= g_{Na} m^3 h (V - V_{Na}); \\
G_K &= g_K n^4 (V - V_K); \\
G_L &= g_L (V - V_L).
\end{aligned}$$

В этой системе уравнений $V(t)$ – мембранный потенциал, а $m(t)$, $h(t)$, $n(t)$ – воротными переменными: m и n – переменные активации для калиевых и натриевых каналов, а h – переменная инактивации натриевых каналов. Воротные переменные – это вероятности открытия или закрытия ионных каналов в нейронной мембране. Остальные параметры известны и определяются экспериментально [2].

Сумма синаптических токов рассчитывается по следующей формуле:

$$I_{syn} = C_m g_{exc} \left[\sum_{k=1}^{N_e} \sum_I I(t - t_k^I) - K \sum_{m=1}^{N_i} \sum_n I(t - t_m^n) \right]$$

Здесь N_e – количество возбуждающих нейронов, N_i – количество тормозных нейронов, $1(t - t_k^I)$ и $1(t - t_m^n)$ – индикаторные функции, принимающие значение 1, если их аргументы равны нулю, и 0 – в противном случае, t_k^I – время разряда i -го спайка k -го нейрона [3].

Аналогично для t_m^n . C_m – мембранная емкость. $g_{exc} = 1$ и $K = 4$ – константы, которые вычисляются эмпирически.

Чтобы учесть влияние мутации гена SCN1A на натриевый ионный канал изменим первое уравнение системы следующим образом:

$$C_m \frac{dV}{dt} = I_{ext} + I_{syn}(t) - (G_{Na} + G_{Na_{epilepsy}}) - G_K - G_L,$$

где $G_{Na_{epilepsy}} = g_{Na_{epilepsy}} g_{SCN1A} m^3 h (V - V_{Na})$ – эффект мутации гена SCN1A.

Здесь $g_{Na_{epilepsy}}$ – проводимость натриевого канала при эпилепсии, g_{SCN1A} – некое числовое значение, отражающее изменение проводимости натриевого канала, вызванное мутацией гена SCN1A.

Результаты численного эксперимента

Данная модель была реализована в среде разработки Google Colaboratory. Преимуществами этой среды являются высокая вычислительная скорость и возможность использования Python-библиотек для анализа данных онлайн. При программировании использовались библиотеки NumPy и SciPy, предоставляющие широкие возможности для численного моделирования, и библиотека Matplotlib, позволяющая визуализировать полученные данные.

На рис. 1 представлен график колебаний мембранного потенциала с течением времени больного эпилепсией, построенный на основе модели Ходжкина-Хаксли с условием влияния гена SCN1A на натриевый ионный канал Nav1.1 при следующих параметрах: количество возбуждающих нейронов – 200, количество тормозящих нейронов – 50. В качестве проводимости натриевого канала бралось значение 130 мСм.

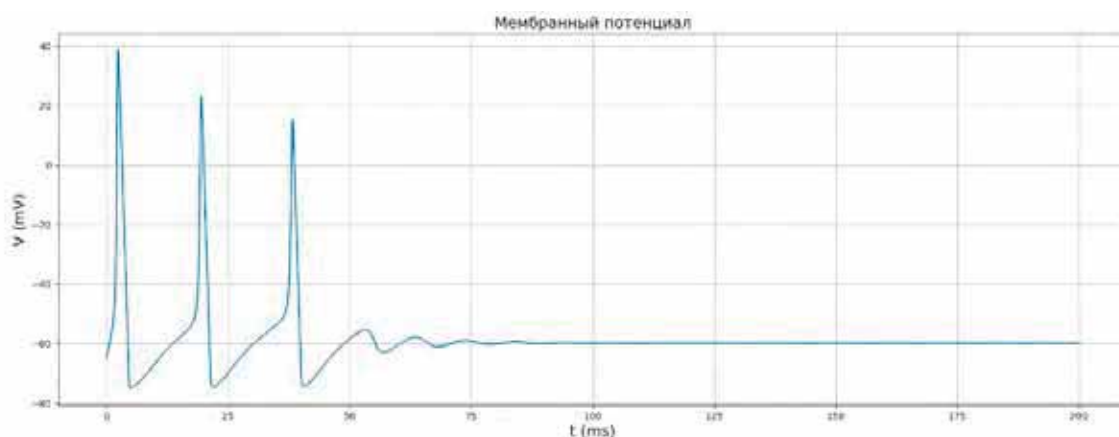


Рис. 1. Зависимость мембранного потенциала от времени больного эпилепсией

Как видно из графика зависимости мембранного потенциала от времени при эпилепсии имеем затухающие колебания мембранного потенциала, что указывает на наличие специфической формы эпилептического приступа, известной как «эпилептиформные затухающие колебания». Эпилептиформные затухающие колебания характеризуются последовательными пиками-волнами, которые уменьшаются по амплитуде и продолжительности со временем.

Первый пик-волна соответствует начальной фазе возбуждения (эксцитация), когда активность нейронов достигает пика. Второй

пик-волна представляет переходную фазу, когда активность постепенно угасает. Наконец, третий пик-волна соответствует фазе ингибирования или постэксциации, когда активность нейронов снижается до более низкого уровня. Эпилептиформные затухающие колебания часто наблюдаются в электроэнцефалограмме (ЭЭГ) пациентов с эпилепсией.

Изменения в затухающих колебаниях мембранного потенциала при эпилепсии могут быть связаны с дисфункцией нейронов и необычными электрическими взаимодействиями в мозге. Они могут быть результатом неправильной распространения возбуждения, несбалансированности между возбуждающими и ингибирующими процессами или других факторов, вызывающих эпилептическую активность.

Заключение

В данной научной статье эпилепсия рассматривалась как неврологическое заболевание, характеризующееся эпилептическими припадками, вызванными активностью нейронных сетей головного мозга. С помощью модели Ходжкина-Хаксли и численных экспериментов проанализирована динамика нейронных сетей при эпилепсии. Графики мембранного потенциала показали наличие эпилептиформных затухающих колебаний, которые характеризуются последовательными пиковыми волнами, уменьшающимися по амплитуде и продолжительности с течением времени. Эти изменения могут быть связаны с дисфункцией нейронов и необычными электрическими взаимодействиями в мозге. Полученные результаты могут помочь разработать новые методы лечения и улучшить жизнь пациентов, страдающих эпилепсией. Дальнейшие исследования механизмов эпилептических разрядов помогут лучше понять эту сложную патологию и разработать более эффективные методы борьбы с ней.

Список литературы

1. Котов А. С., Фирсов К. В. Эпилепсия : руководство для врачей // М. : Медицинское информационное агентство, 2021. 348 с.
2. Hodgkin A. L., Huxley A. F. Currents carried by sodium and potassium ions through the membrane of the giant axon of Loligo // J Physiol. 1952. Vol. 116. P. 449–472.
3. Кутыркина М. А., Мамедова Т. Ф. Численное моделирование нейронной сети на основе модели Ходжкина – Хаксли // Огарев-online. 2022. № 14. URL: <https://journal.mrsu.ru/arts/chislennoe-modelirovanie-nejronnoj-seti-na-osnove-modeli-xodzhkina-xaksli>

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЫПУСКНИКОВ ИНЖЕНЕРНО-ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛИСТОВ ПГУ

*Татьяна Вячеславовна Черушева¹,
Наталья Васильевна Зверовщикова²,
Павел Владимирович Айкашев*

^{1,2,3} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹ tank1100@yandex.ru, ² nvz.matematika@yandex.ru,

³ aikashev.pavek@mail.ru

Аннотация. Проблема несбалансированности спроса и предложения на рынке труда инженерно-технических специалистов (ИТС) начала активно проявляться с середины 1990-х гг. До 2013 г. доля выпускаемых инженерно-технических специалистов среди всех выпускников снижалась и лишь в последние годы начала активно расти. Однако потрясения последних лет снова начали негативно сказываться на количестве и качестве выпускаемых инженерно-технических специалистов и на сбалансированности рынка труда. В 2019–2020 гг. в связи с массовым распространением COVID-19 пострадало как качество выпускаемых инженерно-технических специалистов, так и количество абитуриентов. В свою очередь, санкции, введенные в 2022–2023 гг. против России, привели к несбалансированности спроса и предложения на рынке труда для инженерно-технических специалистов. В связи с этим наблюдается повышенный отток как иностранных специалистов, возвращающихся на родину, так и российских. Поэтому задача моделирования распределения выпускников инженерно-технических специальностей является актуальной. Рассматривается модификация экономической модели, предложенной авторами в статье [1], которая позволяет проводить прогнозы численности выпускников инженерно-технических специальностей и общего выпуска в Пензенском государственном университете, а также их дальнейшего распределения.

Ключевые слова: модель спроса и предложения, математическая модель, прогнозирование

MODELING THE DISTRIBUTION OF ENGINEERING GRADUATES AT PGU

*Tatyana V. Cherusheva¹, Natalia V. Zverovshchikova²,
Pavel V. Aikashev³*

^{1,2,3} Penza State University, Penza, Russia

¹ tank1100@yandex.ru, ² nvz.matematika@yandex.ru,

³ aikashev.pavek@mail.ru

Abstract. The problem of imbalance between supply and demand in the labor market of engineering and technical specialists (ETS) has been actively manifested

since the mid-1990s. Until 2013, the share of ETS graduates among all graduates was declining and only in recent years started to grow actively. However, the shocks of recent years have again begun to negatively affect the quantity and quality of engineering and technical graduates and the balance of the labor market. In 2019–2020, both the quality of ITS graduates and the number of entrants suffered due to the massive spread of Covid-19. In turn, sanctions imposed in 2022–2023 against Russia have led to an imbalance of supply and demand in the labor market for engineering and technical specialists. In this regard, there is an increased outflow of both foreign specialists returning home and Russian specialists. Therefore, the task of modeling the distribution of graduates of engineering and technical specialties is relevant. The paper considers the modification of the economic model proposed by the authors in the article [1], which allows us to forecast the number of engineering graduates and the total output at Penza State University, as well as their further distribution.

Keywords: supply and demand model, mathematical model, forecasting

Введение

В последние годы, проблема несбалансированности спроса и предложения инженерно-технических специалистов становится все более актуальной. Активный отток специалистов наряду с ослабевшими возможностями по привлечению иностранных специалистов создает все больший дисбаланс на рынке труда ИТС. Многие компании в связи с расширением требуют все больше и больше качественных инженерно-технических специалистов, что повышает спрос на соответствующих специалистов. Хотя количество бюджетных мест для технических специалистов в вузах России и увеличивается, несбалансированности спроса и предложения ИТС на рынке труда всё ещё остается. Стоит отметить, что по данным Минцифры [2] на рынке IT специалистов ситуация с оттоком кадров стабилизировалась, и начался активный рост как числа вакансий, так и числа занятых специалистов.

Помимо этих причин, к дисбалансу спроса и предложения приводит высокая профессиональная мобильность, смена специальности и отсеивание в процессе обучения, являющиеся следствием несоответствия требований современных работодателей и получаемых навыков студентов. По данным Росстата [3] в 2009 среди инженерно-технических специалистов не по специальности работали около 50 % выпускников вузов и около 60 % выпускников ссузов. К текущему моменту эта ситуация начала выправляться, но все равно ещё наблюдается большое число выпускников, работающих не по специальности. По данным 2019 года среди студентов, окончивших вузы в 2016–2018 годах, около 31 % студентов работают не по специальности, а среди окончивших колледжи – 43 % и выпускников профессиональных училищ – 50 % не работает по полученной специальности.

1. Базовая математическая модель числа выпускников инженерно-технических специальностей и общего выпуска в Пензенском государственном университете

Приведем описание модели, рассмотренной авторами в работе [1], модификации которой и посвящена данная статья.

В [1] была представлена простейшая модель, описывающая связь между числом выпускаемых и числом занятых инженерно-технических специалистов.

Эта модель связывает предложение рабочей силы (выпуск ИТС) и количество занятых инженерно-технических специалистов с величиной выпуска ИТС и численностью работающих по специальности за последние два года.

Основные блоки модели. Представленная модель по данным ПГУ [5] для исследования динамики численности занятых ИТС включает 2 блока: блок численности выпуска ИТС и блок численности занятых ИТС (рис. 1).



Рис. 1. Блок-схема модели численности занятых ИТС

1. блок численности выпуска ИТС

$$GE(t) = b_1 GE(t-1) + b_2 GE(t-2), \quad (1)$$

2. блок численности занятых ИТС

$$ET(t) = b_3 GE(t), \quad (2)$$

где $GE(t)$ – численность выпуска ИТС ПГУ; $ET(t)$ – количество занятых ИТС среди выпускников Пензенского государственного университета.

В следующем разделе опишем разработанную модификацию модели (1)–(2).

2. Усовершенствованная модель выпуска ИТС ПГУ.

Модифицируем математическую модель (1)–(2).

Добавим блок численности специалистов, работающих не по полученной специальности:

$$EE(t) = b_{21} GE(t) - b_{22} * EC(t-1), \quad (3)$$

где $EC(t)$ количество технических специалистов, закончивших ПГУ по целевым направлениям, $EE(t)$ – отток студентов, работающих не по специальности, $GE(t)$ – численность выпуска ИТС ПГУ.

Преобразуем блок занятых инженерно-технических специалистов следующим образом:

$$ET(t) = b_{31} * EC(t) + b_{32}(GE(t) - EC(t)) - b_{33}EE(t). \quad (4)$$

В связи с существующим дисбалансом спроса и предложения на рынке труда для технических специалистов, блок численности выпускаемых инженерно-технических специалистов представим следующим образом:

$$GA(t) = b_{11}GA(t-1) + b_{12}GA(t-2) + b_{13},$$

$$GE(t) = b_{14}GA(t-1) + b_{15}GA(t-2),$$

где $GA(t)$ – численность поступивших абитуриентов по инженерно-техническим специальностям; b_{13} – коэффициент, определяющий дополнительное увеличение бюджетных мест для инженерно-технических направлений.

Блок-схема модифицированной математической модели распределения выпускников инженерно-технических специальностей ПГУ приведена на рис. 2:

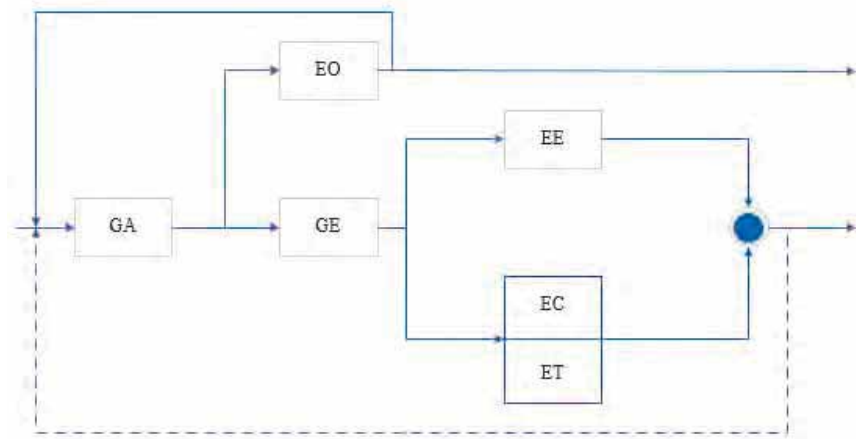


Рис. 2. Блок-схема модифицированной модели численности занятых ИТС.

Запишем полученную математическую модель:

$$\begin{cases} EE(t) = b_{21}GE(t) - b_{22} * EC(t-1), \\ ET(t) = b_{31} * EC(t) + b_{32}(GE(t) - EC(t)) - b_{33}EE(t), \\ GA(t) = b_{11}GA(t-1) + b_{12}GA(t-2) + b_{13}, \\ GE(t) = b_{14}GA(t-1) + b_{15}GA(t-2). \end{cases} \quad (5)$$

Система уравнений (5) позволяет моделировать распределение выпуска ИТС ПГУ с учетом таких параметров как

- объем поступивших и закончивших обучение специалистов;
- отток специалистов, работающих не по специальности;
- число инженерно-технических специалистов, поступивших по целевым направлениям;
- дополнительное увеличение бюджетных мест по направлениям, по которым наблюдается недостаток специалистов.

В дальнейшей работе данная модель будет протестирована на реальных данных за последние несколько лет, а также возможно будет учтено шоковое воздействие COVID-19 на баланс спроса и предложений на рынке труда для инженерно-технических специалистов.

Список литературы

1. Черушева Т. В., Зверовщикова Н. В., Айкашев П. В. Моделирование показателей выпуска и занятости инженерно технических специалистов ПГУ // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : тр. XVII Междунар. конф. / под ред. И. В. Бойкова. Пенза : Изд-во ПГУ, 2022. С. 85–88.
2. Минцифра : [сайт]. URL: <https://digital.gov.ru/ru/>
3. Гимпельсон В. Е., Капелюшников Р. И. [и др.]. Выбор профессии: чему учились и где пригодились // Экономический журнал Высшей школы экономики. 2009. Т. 13, № 2. С. 172–216.
4. Росстат : [сайт]. URL: https://rosstat.gov.ru/labor_market_employment_salaries
5. Региональный центр содействия трудоустройству и адаптации выпускников ПГУ : [сайт]. URL: <https://lider.pnzgu.ru/>

К ВОПРОСУ О НЕОБХОДИМОСТИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ КОСМИЧЕСКИХ ИЗЛУЧЕНИЙ ДЛЯ ПРОФИЛАКТИКИ ВРОЖДЕННЫХ ЗАБОЛЕВАНИЙ

*Михаил Иванович Гринцов¹, Наталья Сергеевна Бофанова²,
Юлия Александровна Князькина³, Виктория Михайловна Гринцова⁴*

^{1,2,3} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

⁴ Дорожная больница, Москва, Россия

¹ grintsovM@mail.ru, ⁴ grintsova2012@mail.ru

Аннотация. Постоянная переформатизация планет приводит к изменениям в распределении масс вещества и энергии в Солнечной системе. В то же время явление нарушения симметрии человеческого эмбриона считается главной нерешенной загадкой и чашей Грааля биологии развития. Эмбриональные модели развития человека должны совершенствоваться [1]. Правило М. Хасанова о том, что «никакие действия не должны предприниматься в реальности, прежде чем они не будут смоделированы в цифре» [2], касается и репродуктологии. Клинические исследования показали, что геном гамет родителей и вновь образованной зиготы чутко реагирует на изменения потоков вещества и энергии в Солнечной системе и проявляется различными пороками развития, в том числе и пороками в виде онкопатологии. Сопоставление столь разных по масштабам нарушений симметрии в Солнечной системе и репродуктологии показали наличие достоверных связей между ними. Получается, что модели репродуктологии целесообразно соизмерять с моделями астрофизических конфигураций с целью определения конфигураций, при которых не происходит нарушение генома.

Ключевые слова: модели потоков энергии галактических космических лучей, предвидение, зигота, моделирование

CONTINUATION MUST BE PRECEDED BY DIGITAL MODELING OF ZYGOTE FORMATION

*Mihail I. Grintsov¹, Natalia S. Bofanova²,
Yulia A. Knyazkina³, Viktoria M. Grintsova⁴*

^{1,2,3} Penza State University, Penza, Russia

⁴ Road Hospital, Moscow, Russia

¹ grintsovM@mail.ru, ⁴ grintsova 2012@mail.ru

Abstract. The constant reformatting of planets leads to changes in the symmetry of the distribution of masses of matter and energy in the Solar System. At the

same time, the phenomenon of symmetry breaking in the human embryo is considered the main unsolved mystery and the Holy Grail of developmental biology. Embryonic models of human development must be improved [1]. M. Khasanov's rule [2] that "no actions should be taken in reality before they are simulated digitally" also applies to reproductology. Clinical studies have shown that the genome of parental gametes and the newly formed zygote reacts sensitively to changes in the flow of matter and energy in the solar system and manifests itself in various developmental defects, including defects in the form of oncopathology. A comparison of events of such different scales in symmetry breaking in the Solar system and reproductology showed the presence of reliable connections between them. It turns out that it is advisable to compare reproductive models with models of astrophysical configurations in order to determine configurations in which genome disruption does not occur.

Keywords: models of energy flows of galactic cosmic rays, prediction, zygote, modeling

Состояние проблемы. В Солнечной системе происходит постоянная смена конфигураций планет/эфемерид. Все планеты обращаются по «своим» законам: периодически они выстраиваются по одну сторону относительно Солнца, образуя «парады». «Парады» планет образуются не только относительно Солнца, но и к каждой из планет. Земля вместе с миллионами зигот может как принимать участие в этих «парадах», так и может выпадать из строя «парадов» и пребывать «особняком» в конкретном градусе эклиптики. Из центра нашей Галактики через Северный полюс эклиптики ежечасно в мерцающем режиме в пределы Земли вторгаются массы вещества и высоких плотностей ионизирующих видов лучевой энергии [3–5, 7, 8, 13, 14]. Парады планет относительно Земли, на которой ежесуточно образуются миллионы зигот, могут образовывать как «щит» от вторжения вещества и высоких плотностей ионизирующей энергии галактических космических лучей (ГКЛ), так и конфигурации, которые можно называть «открытыми окнами» вторжения энергии ГКЛ [8,9].

Потоки энергии ГКЛ самых малых и самых больших энергий различаются в 10^{15} раз. Такой огромный диапазон энергий изучают при помощи измерительных приборов разных типов. Для изучения КЛ высоких энергий ($E \approx 10^{15}$ эВ) используются ионизационные калориметры, которые представляют собой детекторы = сцинтилляционные счетчики. КЛ в диапазоне энергий $10^{11} < E < 3 \cdot 10^{15}$ эВ имеют галактическое происхождение. Их энергетический спектр описывается степенным законом $J(E) = J_0 E^{-2,75}$ [4]. В организме человека (и млекопитающих) близким аналогом ионизационной камеры являются Фаллопиевы яйцеводы, в которых происходит «встреча» потоков энергии ГКЛ с яйцеклеткой и/или зиготой. При активном Солнце поток энергии КЛ минимален. По той причине, что Солнце выполняет роль экрана

и отклоняет лучи Галактического происхождения. В тех случаях, когда Солнце (или группа планет) расположено между источником ГКЛ и Землей с многочисленными зиготами, то последние не подвергаются поражению энергией ГКЛ. В тех случаях, когда на пути вторжения энергии ГКЛ нет ни Солнца ни других газовых гигантов, то энергия ГКЛ беспрепятственно проникает на Землю и повреждает многочисленные гаметы родителей и миллионы зигот. Потоки=ливни энергии ГКЛ порождают потоки = ливни выкидышей. Зиготы, которые не получили дозу энергии для образования выкидыша, продолжают развиваться, достигают полости матки и наступает плацентация. Но поражённые зиготы развиваются не по нормальному, а по патологическим сценариям (их много). Гамма-кванты, в отличие от заряженных частиц, не взаимодействуют с космическими магнитными полями, а распространяются прямолинейно от источника к зиготе. Суточные изменения КЛ связаны с попаданием КЛ на зиготы, находящиеся на определённых координатах Земли (на Северном полюсе, откуда исходят ГКЛ, на экваторе, на освещённой или затенённой стороне Земли), связанные с вращением Земли вокруг оси и вокруг Солнца. В тех случаях, когда потоки ГКЛ периодически перекрываются планетами, группами планет и на Землю=зиготу КЛ не попадают. Это астрономическое явление носит название «покрытие звёзд астероидом или планетами» [3–5].

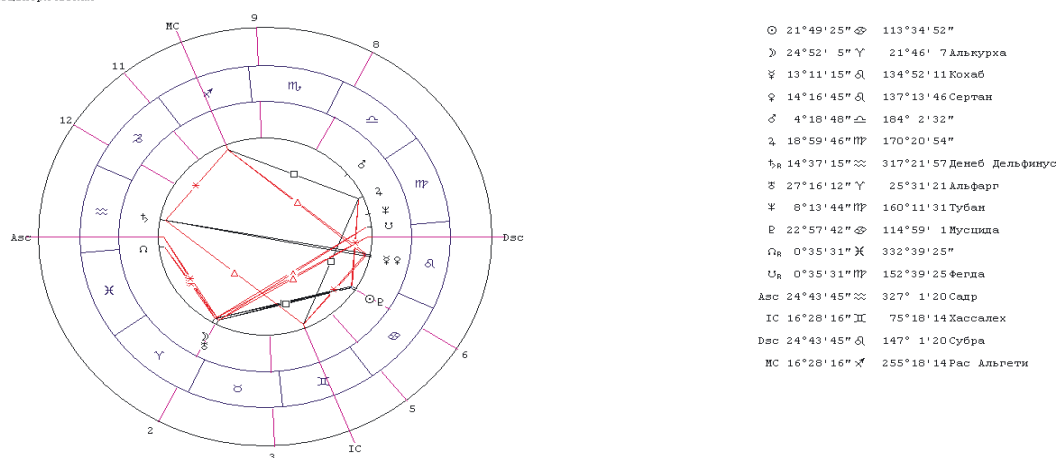
Срок годности яйцеклетки к принятию мужского генетического материала и образованию зиготы – всего один оборот Земли вокруг своей оси. На «втором обороте» Земли вокруг оси яйцеклетка и спермий теряют способность образовать зиготу. При вращении Земли вокруг оси в различные часы суток постоянно меняются координаты вторжения энергии ГКЛ – происходит то подставление зигот под удар ливней ионизирующих видов энергии ГКЛ, то, отвернувшись другой стороной, предохраняют=защищают гаметы и зиготу от поражающего клинического эффекта – геном зиготы остаётся целым и не повреждённым. Т.е., целостность генома гамет родителей и зиготы зависит от координат и времени суток получения энергии ГКЛ. Практически удобной системой координат, которая позволяет делать такие заключения, является сферическая эклиптическая система координат и Гринвичская система отсчёта времени на определённых координатах. (См. клинические примеры 1–7).

С момента образования зиготы до момента времени плацентации происходит, как правило, шесть суток. При образованном «щите» из планет, обеспечивающем предотвращение вторжения энергии ГКЛ, зигота защищена от повреждающей энергии ГКЛ. Для того чтобы «обезопасить» гаметы в свободном полёте от повреждения ионизирующими потоками энергии ГКЛ, необходимо рассчитать траектории планет и момент влёта потоков энергии ГКЛ, чтобы те не встретились

с моментом времени образования зиготы. Это можно вычислить «классическими» способами расчёта траекторий движения планет, но можно вычислять и при помощи системы «ZET» или иных технологий, применяемых в астробиологии. Координатами=опорными точками, которые позволяют с приемлемой степенью точности вычислять моменты времени вторжения энергии ГКЛ, является эклиптическая и Гринвичская система координат. Отсчёт событий ведётся от момента созревания яйцеклетки/от момента времени овуляции. Первые сутки образования зиготы самые важные в жизни человека. Вторые сутки, в которые яйцеклетка не восприимчива к восприятию мужского генетического материала, последние как правило, в образовании зиготы не участвуют. Те предположения, которые утверждают, что жизнеспособность=способность к образованию зиготы может длиться до пяти суток – особого значения не имеет, так как яйцеклетка спермия уже не воспринимает. За шесть суток «шестивия зиготы» к полости матки зигота, как правило, может как попадать под «космические ливни», так и избегать их и не подвергаться удару энергией ГКЛ. С момента полноценной плацентации зигота начинает получать питательные вещества и энергию от матери и ей и плоду «космические ливни» уже не представляют опасности. Под плацентарной защитой энергия ГКЛ утрачивает мутагенный клинический эффект и для плода не опасна. Если считать, что «нормально плацентировавшаяся зигота», пребывающая под «плацентарной защитой» постоянно подвергается мутагенному воздействию энергии ГКЛ, то такой ход логики, с нашей точки зрения, несостоятельный. Наши клинические наблюдения подтверждают, что точка зрения Кольцова и Шредингера о том, что самым опасным периодом развития человека является период шествия гамет и зиготы в полости яйцеводов.

Клинические примеры «так мало проживших».

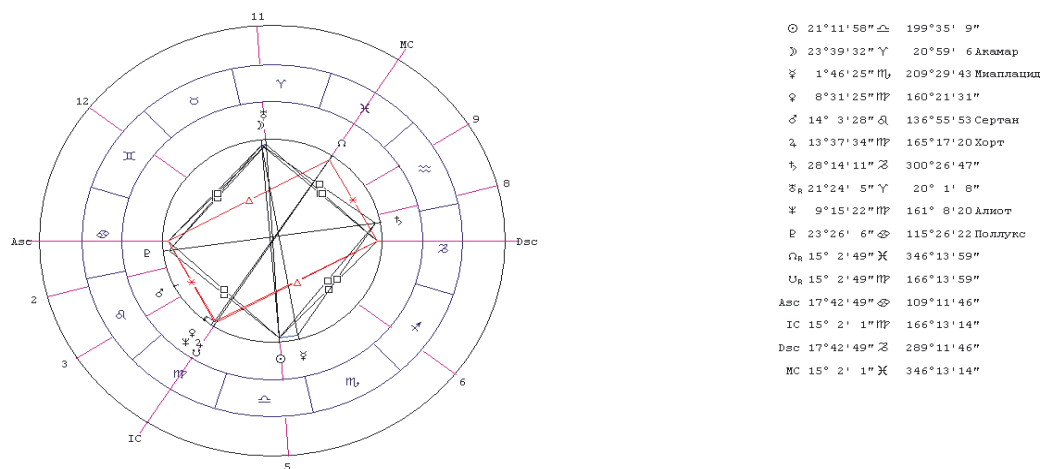
Родился 15 июля 1933г. в Пенз. обл. Умер 13.12.1966г. Прожил 33 г. Причина смерти неизв.
Планишус
Топоцентрическая



Фиг. 1

ХХ Родился 15 июля 1933 г. Умер 13 дек. 1966 г. Прожил 33 года. Причина смерти неизвестна. *Комментарий:* причиной «малого количества прожитых лет» могло быть вторжение вещества и высоких плотностей энергии ГКЛ в пределы Земли из Северного полюса= из центра нашей Галактики при «открытом окне». «Открытым окном» вторжения энергии ГКЛ в данном случае следует считать дуговое расстояние между Сатурном и Марсом относительно МС =Северного полюса эклиптики. Более точно: Сатурн располагался в 14°37'18" Водолея, а Марс располагался на 4°18'48" Весов. Суммарно это выглядит так: 14°Водолея +30°Козерога+30°Стрельца+ 30°Скорпиона и +≈ 26°Весов. Всего ≈130° дуговых градусов эклиптической беспланетной «пустоты» в проекции траектории влёта вещества и высоких плотностей энергии ГКЛ. Столь большое дуговое «беспланетное» расстояние на эклиптике следует считать «открытым окном» вторжения вещества и ионизирующих видов лучевой энергии ГКЛ, что эквивалентно «отсутствию щита», предотвращающего вторжение энергии ГКЛ. Заключение: Умерший, предположительно, страдал одной из многих форм неизлечимой онкологии.

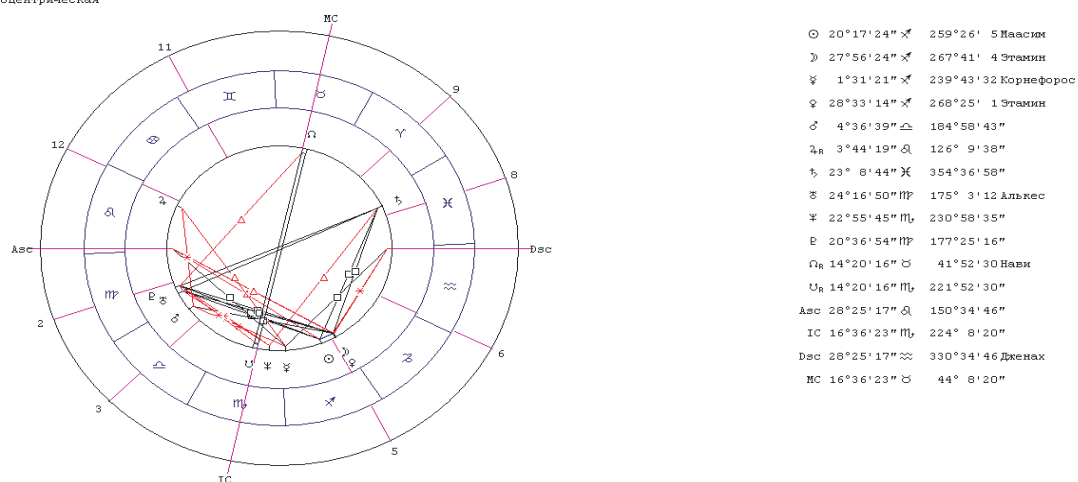
Зачат 15 окт. 1932г. в Пенз. обл. Умер 13.12.1966г. Прожил 33 г. Причина смерти неизв.
Плацидус
Топоцентрическая



Фиг. 2

Ребёнок мог быть зачат ≈15 окт. 1932 г. Девять месяцев «обратного отсчёта времени» показывает, что в Солнечной системе было образовано «открытое окно» вторжения энергии ГКЛ на координатах г. Пензы. «Открытое окно» — это дуговое беспланетное расстояние между Ураном в 21°24' Овна и Сатурном в 28°14' Козерога. Зигота ребёнка в это время получила «раковую дозу» энергии ГКЛ. Д-з: не жилец.

Умер 13.12.1966г. в Пенз. обл. Прожил 33 г. Причина смерти неизв.
Планидуэ
Топоцентрическая



Фиг. 3

Мужчина прожил 33 г. Умер 13 дек. 1966 г. Причина смерти неизвестна. *Комментарий:* одной из предполагаемых и вероятных причин смерти может быть онкология=заболевание крови.

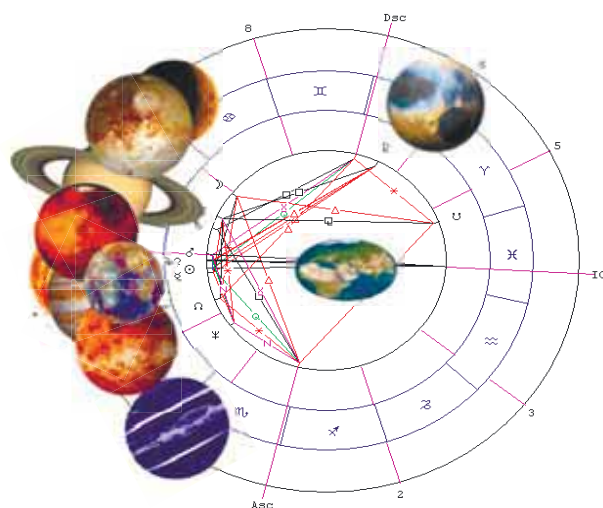
Клинический анализ сотни «так мало проживших». Из вычислений следует, что дети, подростки и лица, «так мало прожившие», были зачаты в те астрономические периоды времени, когда на эклиптике Солнечной системы образовывались поля / секторы, свободные от планет. Если момент образования зиготы совпадал с моментом времени образования «свободного поля» от планет = «прорехи» в проекции Северного полюса эклиптики, то этот промежуток времени характеризовался тем, что из нашей Галактики вторгались потоки вещества и высоких плотностей ионизирующей энергии галактических космических лучей (ГКЛ), которые обладали клиническим мутагенным эффектом [3–5, 7]. Наличие «эклиптической «прорехи» – свободной от планет эквивалентно образованию «открытого окна» вторжения вещества и энергии ГКЛ в пределы Солнечной системы.

Выводы. Зачатие в моменты времени, в которые конфигурации планет образуют «открытые окна» вторжения энергии ГКЛ приводит к снижению продолжительности жизни.

Кроме вышеприведенных примеров, где показаны предполагаемые механизмы гипотезы мутагенеза, приводим примеры исторических лиц, которые были зачаты и родились в «благоприятные периоды» астрономического времени – при «закрытых окнах» вторжения энергии ГКЛ. Смысл этой идеи своевременно сформулировал Академик РАН К. Г. Скрябин (2018): «С открытием технической возможности редактирования генома возникла реальная перспектива моделирования «дизайнерских детей»: ребёнок может и должен быть здоровым, красивым и талантливым».

Метаанализ дат рождения исторических лиц – естественных моделей, которые поменяли мир, показал, что они были зачаты в такие часы суток, и при таких астрономических конфигурациях, при которых происходили концентрации планет в области Северного полюса эклиптики. Примеры дат зачатия выдающихся исторических лиц: см. фиг. 4–8.

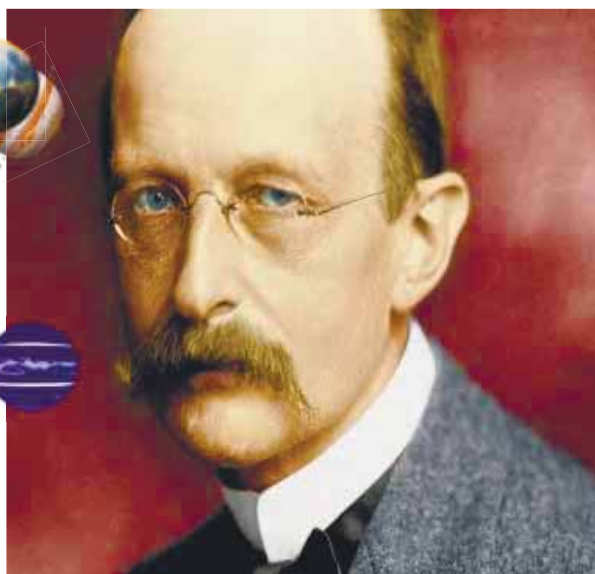
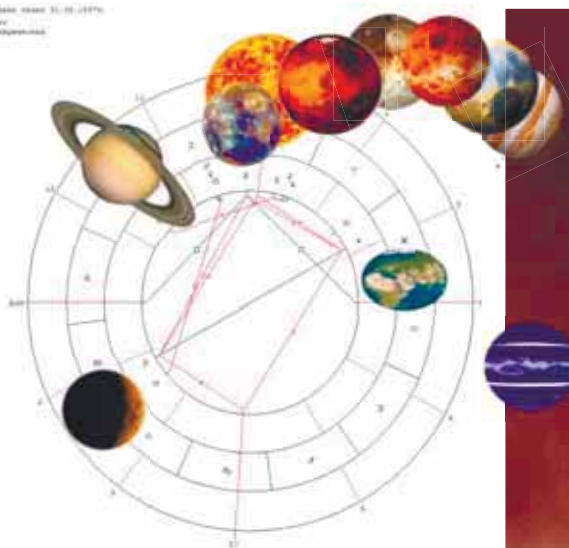
Дж. Кассини зачат 9.09.1642г.



Фиг. 4

Дж. Кассини зачат ≈ 9 сентября 1642 г. при астрофизической конфигурации, которая образовала «закрытое окно» вторжения энергии ГКЛ. Д-з: Гениальность неземного уровня.

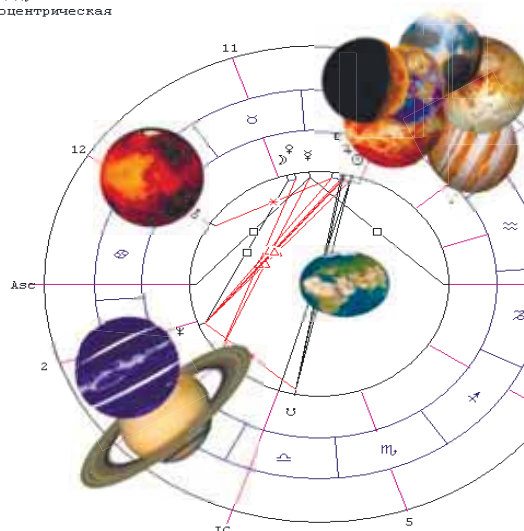
Макс Планк зачат 31.05.1857г.
Отец: Макс Планк
Мать: Анна Планк



Фиг. 5

Макс Планк зачат ≈ 31 мая 1857 г. Гениальность неземного

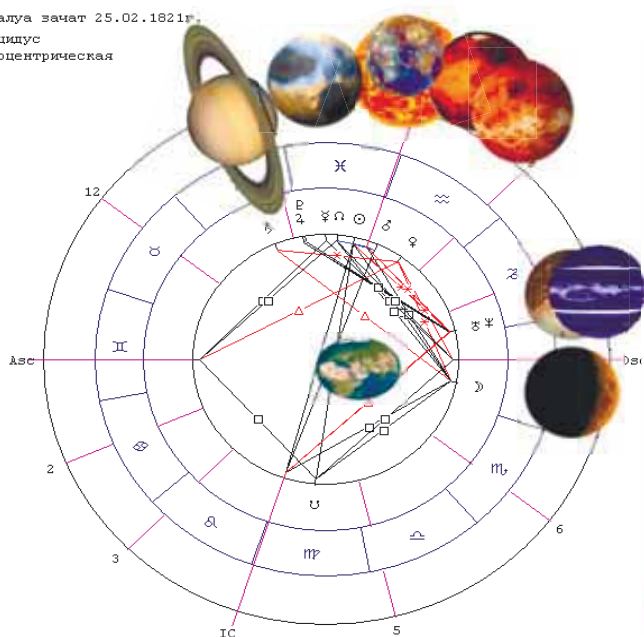
Р. Декарт родился 31 марта 1596г. во Франции в 20:40.
Плацидус
Геоцентрическая



Фиг. 6

Р. Декарт родился 31.03.1596 \approx в 20:40. при расположении семи светил в 10-м секторе эклиптики=в проекции Северного полюса. Д-з: Гениальность неземного уровня. При помощи его интеллекта преобразован мир.

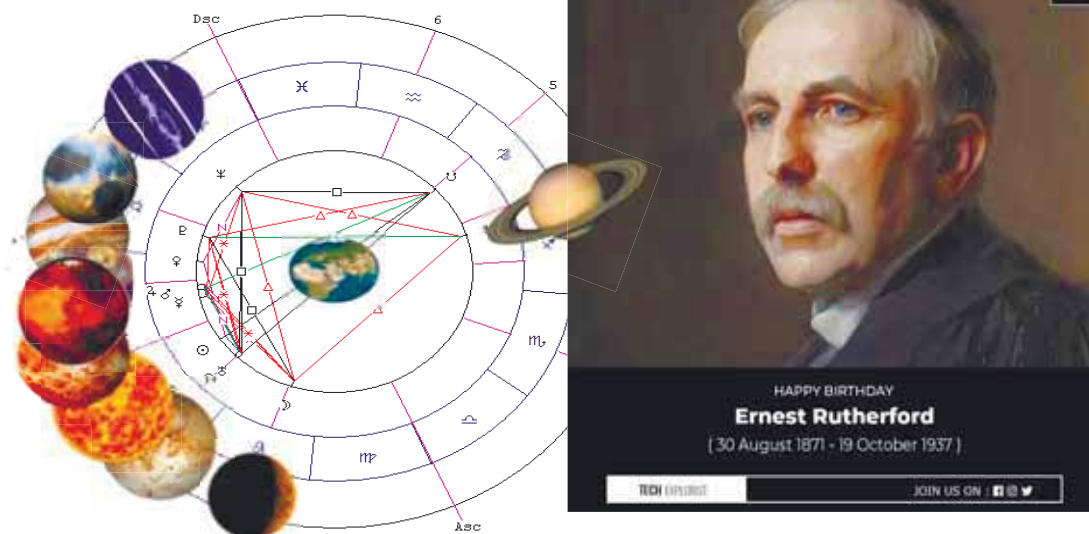
Э. Галуа зачат 25.02.1821г.
Плацидус
Геоцентрическая



Фиг. 7

Э. Галуа зачат \approx 25.02.1821 при идеальной астрономической конфигурации. Ум этого француза участвовал в преобразении мира.

РЕЗЕРФОРД Э ЗАЧАТ ОРИЕНТЪ 2.07.1879 г. НОВАЯ ЗЕЛЛАНДИЯ.
Плацидус
Топоцентрическая



Фиг. 8

Э. Резерфорд зачат $\approx 2.07.1879$ при благоприятной астрономической конфигурации. Д-з: Гениальность неземного происхождения.

Заключение. Меченными космическими факторами (КФ) риска разрушения генома могут быть поля/секторы эклиптики, свободные от планет. Если Северный полюс эклиптики закрыт планетами Солнечной системы, то это является меченным астрофизическим образованием Солнечной системы, который указывает не невозможность разрушения генома гамет или зиготы, не успевшей осуществить явление плацентации. Если этап явления плацентации пройден, то потоки энергии галактических космических лучей для только что плацентировавшейся зиготы и плода уже не представляют опасности. По не понятным нами закономерностям обращения планет Солнечной системы, как правило, через девять лунных месяцев планеты Солнечной системы образуют «вторую конфигурацию прикрытия» Северного полюса от вторжения вещества и высоких плотностей энергии ГКЛ к биоте Земли, защищая уже не зиготу, а родившийся плод. Или «второе открытое окно» вторжения энергии ГКЛ. Благоприятной «меченной» космической конфигурацией для зачатия является конфигурация «зонтика» из планет, которая предотвращает влёт вещества и энергии, или обеспечивает «обвод» энергии ГКЛ = сил гравитации от Земли.

Из приведенного астрофизически-клинического анализа следует вывод о том, что «законы» репродуктологии подчиняются законам астрофизики и небесной механики. Ради рождения здорового ребёнка каждый раз необходимо проводить вычисления конфигурации эфемерид как на момент времени зачатия, так и на момент рождения. Если ещё и на момент рождения будут образованы конфигурации оппозиции,

то несколько таких космических факторов риска станут опасными факторами риска для здоровья будущего ребёнка, то зачатие необходимо перенести. Несмотря на благополучие в семье, у них могут появляться на свет дети с пороками развития. Для того, чтобы на свет появлялись «здоровые, талантливые и красивые» зачатие и рождение детей необходимо согласовывать с законами небесной механики. Для этого предложена технология «редактирования эфемерид».

Выводы.

1. Формулировка требования М. Хасанова о запрете действий в реальности, прежде чем они будут смоделированы в цифре, должно приобрести ранг закона в репродуктологии.

2. Потоки энергии галактических космических лучей способны нарушать баланс=симметрию вещества и энергии на Земле, на которой ежесуточно образуется миллионы зигот.

3. Законы репродуктологии должны быть согласованы с законами перемещения вещества и энергии в Солнечной системе.

Список литературы

1. Ali Brivanlou. Нарушая симметрию... // ПОИСК. 2019. № 27-28. URL: <https://poisknews.ru/magazine/narushaya-simmetriyu>
2. Хасанов М. С уважением к движению // ПОИСК. 2023. № 37.
3. Барсуков О. А. Основы физики атомного ядра. Ядерные технологии. М. : Физматлит, 2011. 559 с.
4. Фортон В. Е. Физика высоких плотностей энергии. М. : Физматлит, 2013. 710 с.
5. Исакова П. Б. Особенности структуры течения в магнитных катаклизмических переменных : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.03.02. М., 2018. 15 с.
6. Чехонин В. Знать – значит выжить // В мире науки. 2022. № 9/10. С. 19–23.
7. Овсянников В. А. Энергетическая модель канцерогенеза // Вопросы онкологии. 2005. Т. 51, № 1. С. 34–40.
8. Гоклен М. Astrology and science. 1970.
9. Гринцов М. И., Гринцова В. М. Врождённые пороки развития у детей и подростков. Пенза, 2021. 145 с.
10. Инге-Вечтомов С. Г. Экологическая генетика. Что это такое? // Соросовский образовательный журнал. 1998. № 2. С. 59–65.
11. Заваденко Н. Н., Немкова С. А. Нарушения развития и когнитивные дисфункции у детей с заболеваниями нервной системы. М., 2016. 359 с.
12. Орлов И. О. Биологические риски как потенциальный фактор космических угроз // Поиск. 2019. № 3-4. С. 1545–1546.
13. Фомин Г. С., Фомина О. Н. Воздух. М., 2002. 422 с.
14. Федоренко Б. С. Радиобиологические эффекты корпускулярных излучений. М. : Наука, 2006. 189 с.

ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ГРАФОВ В АЛГОРИТМАХ КРИПТОГРАФИИ

Алиса Саубьяновна Аюпова¹, Юлия Фридриховна Захарова²

^{1,2} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

² olegzakharov@rambler.ru

Аннотация. Приводятся основные понятия, связанные с псевдолесом. Рассматриваются максимальные ориентированные псевдолеса (функциональные графы). Основное внимание уделяется построению хэш-функции и цифровой подписи с помощью функциональных графов.

Ключевые слова: псевдолес, функциональный граф, структура деревьев, криптография с открытым ключом

APPLICATION OF FUNCTIONAL GRAPHS IN CRYPTOGRAPHY ALGORITHMS

Alisya S. Ayupova¹, Yuliya F. Zakharova²

^{1,2} Penza State University, Penza, Russia

² olegzakharov@rambler.ru

Abstract. The basic concepts related to pseudo-wood are given. The maximal oriented pseudo-trees (functional graphs) are considered. The focus is on constructing hash functions and digital signatures using function graphs.

Keywords: pseudo-forest, functional graph, tree structure, public key cryptography

В основной магистерской работе рассматривается дискретная динамическая система, которая является одной из моделей регуляторного контура, позволяющего построить криптографическую хэш-функцию. Функционирование контура определяется сменой его состояний и полностью характеризуется структурой функционального графа заданного преобразования $A_{f,2}: F_2^n \rightarrow F_2^n$. Метки вершин задают параметры закрытого ключа, сопоставляемые этим вершинам. В данной работе исследуется случай линейных функций. При этом для характеристики функционального графа с заданной линейной функцией в вершинах используются циклические коды и техника их порождения с помощью полиномов. Также описывается структура деревьев функционального графа и изучаются его контуры: неподвижные точки,

длины контуров. Рассматривается некоторое обобщение преобразования $A_{f,2}$.

Ориентированные псевдолеса и отображения в себя в некотором смысле математически эквивалентны. Любое отображение f на множестве X на себя можно интерпретировать как определение ориентированного псевдолеса, который имеет дугу из x в y , когда $f(x) = y$. Полученный ориентированный псевдолес максимален и может включать петли, если для некоторых x $f(x) = x$. Исключение петель приводит к немаксимальным псевдолесам. В обратном направлении любой максимальный ориентированный псевдолес определяет отображение f , для которой $f(x)$ равно конечной вершине дуги, исходящей из x , и любой немаксимальный ориентированный псевдолес можно сделать максимальным путём добавления петель и конвертирования в функцию тем же способом. По этой причине максимальные ориентированные псевдолеса иногда называются **функциональными графами**.

Функциональным графом $G_{f,q}$ называется ориентированный граф, вершинами которого являются элементы F_q^n , причем дуга из вершины \tilde{v} идет в вершину \tilde{y} тогда и только тогда, когда $A_{f,q}(\tilde{v}) = \tilde{y}$. Известно, что функциональный граф любого преобразования конечного множества состоит из нескольких компонент связности. Каждая компонента содержит единственный контур. Некоторые вершины контура являются корнями деревьев, все дуги которых ориентированы к корню.

Представление функции в виде функционального графа даёт удобный язык описания свойств, которые непросто описать с точки зрения теории функций. Такая техника особенно полезна для задач, использующих, которые соответствуют путям в теории графов. Задача прослеживания путей в функциональном графе для нахождения в нём цикла, имеет приложения в криптографии и как часть ро-алгоритма Полларда для факторизации целых чисел и как метод нахождения конфликтов в криптографических хеш-функциях. Мартин, и Вольфрам исследовали псевдолеса, моделирующие динамику клеточных автоматов. Это функциональные графы, они называли их диаграммами переходов состояний, имеют по одной вершине для каждой возможной конфигурации, в которой могут находиться ячейки клеточного автомата, а дуги соединяют каждую конфигурацию, которая из неё получается согласно правилам клеточного автомата. Можно получить свойства автомата из структуры этих диаграмм, такие как число компонент, длину конечных циклов, глубину деревьев, соединяющих неконечные состояния этих циклов, или симметрии диаграммы.

В работе исследуется структура функционального графа в случае, когда $q=2$ (то есть действия происходят над полем F_2), все функции f_i равны между собой и линейны и отображение $A_{f,2}$ действует следующим образом:

$$\begin{aligned} A_{f,2}(v_0, v_1, \dots, v_{n-1}) &= (u_0, u_1, \dots, u_{n-1}), \\ u_i &= v_{i-1} + v_i + v_{i+1}, i=0, 1, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (1)$$

где $v_{-1} = v_{n-1}$, $v_n = v_0$.

С помощью функциональных графов такого типа будем рассматривать реализацию трех криптографических методов: однозначная замена символов, шифрование на основе ключей и создание цифровой подписи.

Однозначная замена символов (One-Time Substitution) заключается в замене каждого отдельного символа в исходном тексте или иначе во входных данных на символ, который представлен для его замены (шифровым алгоритмом). Символы текста будут заменяться символами из функционального графа. Дешифрование является обратным процессом шифрования, то есть символы зашифрованного текста заменяются символами, обратными замене в функциональном графе. Здесь граф представляет собой словарь (алфавит), вершины графа реализуют функции, заменяющие поступивший символ на требуемый или оставляющие его без изменения, если поступает «чужой» символ. В нем ключами являются исходные символы, а значениями – их заменяющие элементы (буквы, цифры или другое при желании). Стоит отметить, что зашифрованный текст при этом имеет небольшой уровень безопасности, т.к. является неустойчивым к атакам на текст. В работе этот подход использовался лишь с точки зрения иллюстрации работы функционального графа.

Для изображения графов использовалась библиотека Matplotlib, для корректной работы подключалась библиотека networkx. На рис. 1 приведено графическое представление функционального графа, реализующего метод одноразовой замены символов для текста, представленного на рис. 2.

Шифрование на основе ключей (симметричное шифрование или асимметричное, если ключей два) основан на использовании ключевого графа для замены данных или перестановки символов в тексте. Ключом в рассматриваемом нами методе может являться последовательность символов, определяющие правила шифрования и дешифрования.

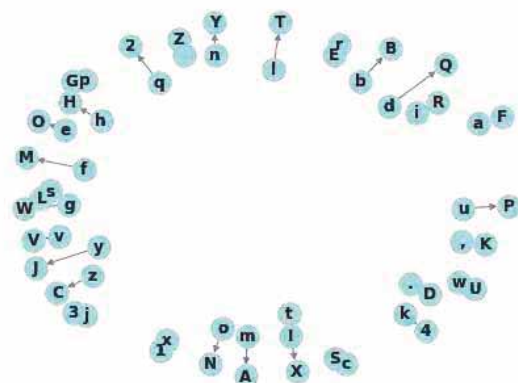


Рис. 1. Граф однозначной замены символов

Однозначная замена символов:

Исходный текст: In graph theory, a pseudoforest is an undirected graph in which every connected component has at most one cycle. That is, it is a system of vertices and edges connecting pairs of vertices, such that no two cycles of consecutive edges share any vertex with each other, nor can any two cycles be connected to each other by a path of consecutive edges. A pseudotree is a connected pseudoforest.

Зашифрованный текст: XYZWFGHJ IHONEJKZ FZGLQPQNMNEOL IZRLZFYZPYQREOSIQOZWEFGHZRYZUHRSHZOVOEJZSNYYOSIQOZSNAGNYOYI ZHFLZFI ZANLIZHVOZSJS TODXTHF IZRLKZRIZRLZFZLJLTOAZNMZVOEIRSOLFYZOQMOZLSNYYOSIRVMZGFR LZNMZVOEIRSOLKZLP SHZTHF IYVNZIUNZSJSSTOLZNMZSNYLOSPIRVOZQMOZLHFEQZFYJZVOEIOIZURIHOF SHZNIHOEKZYNEZSFYZFYJZIUZNSJSTOLZBOZSNYYOSIQOZINZOF SHZNIHOEZBJZFZGF IHNZMZSNYLOSPIRVOZQMOZLZAGZGLQPQNI EDOZRLZFSNYYOSIQOZGLQPQNMNEOLID

Расшифрованный текст: In graph theory, a pseudoforest is an undirected graph in which every connected component has at most one cycle. That is, it is a system of vertices and edges connecting pairs of vertices, such that no two cycles of consecutive edges share any vertex with each other, nor can any two cycles be connected to each other by a path of consecutive edges. A pseudotree is a connected pseudoforest.

Время выполнения: 0.0

Рис. 2. Результат работы программы
(метод одноразовой замены символов)

Пример алгоритма шифрования на основе ключей представим так:

1. Нужно принять входной текст и ключевой граф.
2. Создать пустую строку для зашифрованного текста.
3. Во входящих данных для символов выполняется:
 - проверка символа в принятом ключевом графе;
 - при обнаружении символа надо рассмотреть список его потомков (преемники);
 - если он обнаруживается там, то выбрав первый преемник, отправляем его к зашифрованным данным;
 - точно также добавляется отсутствующий символ в графе, а точнее он попадает в шифр без изменений.

По сравнению с предыдущим методом этот может быть более устойчив к атакам. И, конечно, при успешном получении ключей метод обеспечивает конфиденциальность данных. При этом новым недостатком здесь будет то, что криптографические процессы могут занимать много времени.

Цифровая подпись (Digital Signature) используется для проверки целостности и подлинности данных, соответственно, позволяет проверить

была ли изначальная информация изменена после подписания, а также идентифицирует отправителя данных.

Важным пунктом является генерация подписи, где сперва необходимо получить начальные данные и ключ (закрытый) отправителя. К полученным данным применяется хэш-функция (так получаем хэш-значение). И здесь начинается алгоритм работы цифрового подписания. Он использует ключ отправителя к хэш-значению и таким образом генерируется цифровая подпись. В конце полученная подпись возвращается.

Поскольку данный метод используется для проверки целостности, проверка подписи здесь является не менее важным этапом. Она происходит так: принимаются 3 данные (исходные данные, открытый ключ отправителя и цифровая подпись), где входящей информации применяется хэш-функция для получения хэш-значения. Затем с помощью алгоритма проверки подписи, использующий открытый ключ от отправителя и цифровую подпись к хэшу. Отсюда при получении подтверждения верной подписи, данные считаются верными. Иначе подпись считается неверной, вероятнее всего данные были изменены.

Функция генерирования хэша выполняет операцию хэширования на основе функционального графа. Свое начало берет с символа `text[0]` и последовательно переходит к другим элементам в графе, пока не достигнет символа «Е», обозначающего конец хэш-значения. Все преемники добавляется к хэш-значению.

В результате выполнения приведенного в основной работе кода выводится информация об исходном тексте, хэш-значении, времени выполнения операций. Для небольшого тестового примера это выглядит следующим образом (рис. 3), изображение соответствующего функционального графа приведено на рис. 4.

```
Цифровая подпись:  
Исходный текст: Hello, world!  
Хэш-значение: XYZW  
Время выполнения: 0.0
```

Рис. 3. Результат создания цифровой подписи

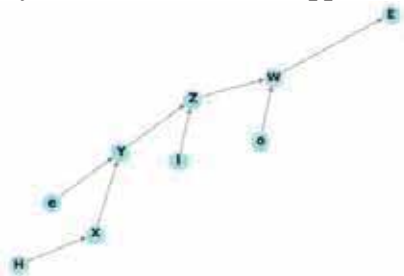


Рис. 4. Key_graph

Плюсами метода с использованием функциональных графов будет то, что обеспечивается целостность сообщения и нельзя получить отказ отправителя от подписи сообщения; при использовании сложных графов имеет высокую степень безопасности.

В качестве минусов можно отметить то, что вычисление хэш-значений и операций при помощи графов может быть затратным по времени; чтобы обеспечить конфиденциальность, требуется использование дополнительных методов шифрования.

Для каждого метода использовались функциональные графы, представленные в виде объектов класса DiGraph из библиотеки NetworkX. Для всех тестовых примеров в приведенных криптографических методах результаты демонстрируют верные шифрование и расшифровку текста, а также вычисление хэш-значения с использованием функциональных графов. Время выполнения шифрования модельного примера происходит за доли секунд, что зависит от размера входных данных.

Список литературы

1. Корниенко А. С. Структура функциональных графов для циркулянтов с линейными булевыми функциями в вершинах / Институт математики СО РАН. Новосибирск, 2014. 12 с.
2. Гусева А. И., Тихомирова А. Н. Дискретная математика для информатиков и экономистов : учеб. пособие. М. : НИЯУ МИФИ, 2010. 280 с.
3. Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля. М. : Мир, 1988. Т. 1. 430 с.
4. Харари Ф. Теория графов. М. : УРСС, 2003. 300 с.
5. ПОИВС : [сайт]. URL: <http://poivs.tsput.ru/ru/Math/Geometry/CombinatorialGeometry/TheoryOfMatroids/Pseudo> (дата обращения: 27.04.2023).

6. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБРАЗОВАНИИ

УДК 372.8

ТЕТРАДЬ-НАВИГАТОР КАК СРЕДСТВО ОБУЧЕНИЯ НА УРОКАХ ИНФОРМАТИКИ

*Гевен Хачатурович Чепухин¹,
Ирина Викторовна Акимова²*

^{1,2} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹ cgeven95@list.ru, ² ulrih@list.ru

Аннотация. Рассматривается актуальная проблема активизации познавательной деятельности учащихся на основе разработки использования тетрадей-навигаторов в курсе школьной информатики. Под тетрадь-навигатором понимается рабочая тетрадь, которая может быть представлена как в электронном, так и в печатном виде. Приведены основные направления применения тетрадей-навигаторов в школе: в учебных материалах, в учебном плане, в информационных ресурсах, в процессе обучения, на карьерном пути. Приводится пример разработанной тетради по теме «Компьютерная графика».

Ключевые слова: активизация, тетрадь-навигатор, информатика

NOTEBOOK-NAVIGATOR AS A MEANS OF TEACHING IN COMPUTER SCIENCE LESSONS

Geven Kh. Chepuhin¹, Irina V. Akimova²

^{1,2} Penza State University, Penza, Russia

¹ cgeven95@list.ru, ² ulrih@list.ru

Abstract. This study examines the actual problem of activating the cognitive activity of students based on the development of the use of navigator notebooks in the course of school informatics. A navigator notebook is a workbook that can be presented both in electronic and printed form. The main directions of using navigator notebooks at school are given: in educational materials, in the curriculum, in information resources, in the learning process, along the career path. An example of a developed notebook on the topic "Computer Graphics" is given.

Keywords: activation, notebook-navigator, computer science

В настоящее время активизация познавательной деятельности учащихся на уроках информатики заявляется как приоритетная задача современного образования. Одним из средств решения данной методической задачи могут выступать информационные технологии [1].

В методической науке тетрадь-навигатор представляет собой рабочую тетрадь, которую преподаватель может использовать на уроках в качестве дополнительного материала к учебникам, учебным пособиям для активизации познавательной деятельности учащихся. Данная тетрадь может содержать ряд методических рекомендаций, краткие словари терминов, или иностранных слов, дневники погоды, перечни различных заданий, кейсов. Данная тетрадь может выступать универсальным шаблоном при организации как урочной, так и внеурочной деятельности.



Рис. 1. Классификация

Тетради-навигаторы могут носить как предметный характер, так и межпредметный, например, служить основой для исследовательской деятельности. Тетрадь может быть распечатана, или представлена в электронном виде в зависимости запланированных преподавателем целей исследования.



Рис. 2. Вид печатной тетради «Навигатор исследователя»

Целью нашего исследования является рассмотрение методических аспектов работы с тетрадью-навигатором на уроках информатики в школе. Далее предложим ряд направлений, которые могут быть реализованы с помощью данного инструментария.

Навигация в учебных материалах: обучаемые могут использовать электронные платформы или учебные порталы для доступа к учебным материалам, заданиям и тестам. Они могут следовать по блокам учебного материала, перемещаться между разделами или выполнять дополнительные задания, чтобы углубить свои знания.

Навигация по учебному плану: обучаемые могут использовать учебный план или программу для определения своего курса обучения. Они могут выбирать необходимые предметы, исследовать последовательность курсов и определять свои интересы, чтобы сформировать свой образовательный путь.

Навигация в информационных ресурсах: обучаемые могут использовать библиотеки, электронные базы данных или поисковые системы для поиска дополнительных материалов или исследования. Они могут определять ключевые слова, фильтровать информацию и анализировать релевантность и достоверность ресурсов.

Навигация в процессе обучения: преподаватели могут использовать различные методы и стратегии навигации, чтобы помочь студентам понять и запомнить материал. Это может включать выделение ключевых понятий, создание графиков или диаграмм, использование вопросов и ответов или структурирование информации с помощью контекстуальных связей.

Навигация по карьерному пути: студенты могут использовать советы карьерных консультантов, информацию о рынке труда и профессиональные сети для определения своих карьерных целей и выбора соответствующего образовательного направления. Они могут исследовать различные варианты, изучать требования для разных профессий и принимать информированные решения.

В своей работе в качестве учителя информатики в МБОУ «Кадетская школа по делам ГОЧС № 70» г. Пензы им. 70-летия Победы в Великой Отечественной войне нами реализовано два из предложенных направлений: *Навигация в учебных материалах*, *Навигация по учебному плану*.

Составлены тетради-навигаторов для продвижения по учебным материалам ряда тем курса информатики. На рис. Представлен фрагмент тетради по теме «Компьютерная графика».

МБОУ «Кадетская школа по делам гражданской обороны, чрезвычайным ситуациям и ликвидации последствий стихийных действий №70» г. Пензы имени 70-летия Победы в Великой Отечественной войне

ТЕТРАДЬ-НАВИГАТОР «Компьютерная графика»



Ключевые слова: графический объект, компьютерная графика, виды графики, формы графических файлов, способы создания графических объектов, графические редакторы.

Графика – это вид изобразительного искусства, в котором основными изобразительными средствами, которые называют графическими, являются свойства изобразительной поверхности (чаще белого листа бумаги) и тональные отношения линий, штрихов и пятен.



ГРАФИЧЕСКИЕ РЕДАКТОРЫ РАСТРОВЫЕ ГРАФИЧЕСКИЕ РЕДАКТОРЫ



ВЕКТОРНЫЕ ГРАФИЧЕСКИЕ РЕДАКТОРЫ



Инструментарий для подбора цветов и генерации цветовых схем:

Сгенерировать палитру цветов автоматически:

1. <https://colorscheme.ru>
2. <https://color.adobe.com>
3. <http://colormini.io/bootstrap>
4. <https://colorsof.co>
5. <http://geniuscolors.com>

Создать палитру вручную:

1. <https://colorhunt.co>

Посмотреть сочетание белого шрифта с фоном выбранного цвета:

1. <http://color-remains.com>
2. <https://palettegenerator.colormatic.co>

Подобрать фотографии в нужной цветовой гамме:

1. <https://labs.timecube.com/multicolor>

Найти изображения по любому из цветов:

1. <https://www.shutterstock.com/ru>

Сервисы для художника

1. ШРИФТЫ:

- Подбор шрифтов - <https://fontsgoogle.com>
- Онлайн конструктор шрифтов - <https://fontstruct.com>

Рис. 3. Вид-тетради-навигатора «Компьютерная графика»

Следующим этапом в нашем исследовании планируется разработка тетрадей-навигаторов по всем заявленным направлениям.

Список литературы

1. Ткач Л. Н., Помахина Л. И. Использование интерактивных средств на уроках информатики // Молодой исследователь Дона. 2022. № 4 (37). С. 83–88.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИИ ЭВРИСТИЧЕСКОГО ОБУЧЕНИЯ НА УРОКАХ ИНФОРМАТИКИ

*Юлия Николаевна Пудовкина¹,
Юлия Вячеславовна Животкова²*

¹ Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

² МБОУ СОШ № 30, Пенза, Россия

¹ yulia_pudowkina@mail.ru, ² julia.93.julia@mail.ru

Аннотация. Анализируются основные действующие модели обучения информатике в школе на уровне основного общего образования. Основное внимание уделено такому разделу информатики, как «Математические основы информатики» (8 класс), который был исследован содержательно и методически с использованием общепринятых нормативных документов, а также современных учебно-методических комплексов дисциплины. Представлен сравнительный анализ учебно-методического комплекса по информатике, свидетельствующий о малом объеме информации, содержащейся в учебниках на данную тему в курсе 8 класса. Приведены примеры использования эвристического обучения на уроках информатики.

Ключевые слова: информатика, методика преподавания информатики, урок, эвристический метод обучения

USING HEURISTIC TEACHING TECHNOLOGY IN INFORMATION LESSONS

Julia N. Pudovkina¹, Julia V. Zhivotkova²

¹ Penza State University, Penza, Russia

² MBOU secondary school № 30, Penza, Russia

¹ yulia_pudowkina@mail.ru, ² julia.93.julia@mail.ru

Abstract. The article analyzes the main operating models of teaching computer science at school at the level of basic general education. The main attention in the work is paid to such a section of computer science as "Mathematical foundations of computer science" (8th grade), which was studied in a meaningful and methodical way using generally accepted normative documents, as well as modern educational and methodological complexes of the discipline. The article presents a comparative analysis of the UMK in computer science, indicating a small amount of information contained in textbooks on this topic in the 8th grade course. The article presents examples of using heuristic learning in computer science lessons.

Keywords: computer science, methods of teaching computer science, lesson, heuristic method of teaching

На сегодняшний день информатика как школьный предмет находится на стадии активного развития. Постоянно появляются новые знания, ресурсы, технологии, которые требуют от современного человека способности быстро адаптироваться к новым условиям, решать новые задачи, требуют умения работать творчески в разных ситуациях. В этой связи должно развиваться и школьное обучение [1, 2]. Существующие классические подходы к методике обучения информатике на уровне основного общего образования (Лапчик М. П., Семакин И. Г., Хеннер Е. К. и др.), которые в малой степени ориентированы на формирование личностных и метапредметных образовательных результатов; преимущественно они направлены на достижение результатов предметных. Особенно отчетливо это проявляется при изучении фундаментального содержания школьного курса информатики, а именно при изучении тематического раздела «Математические основы информатики», когда основное внимание уделяется содержанию обучения, освоению конкретной суммы знаний и определенных предметных результатов [3]. В свою очередь, обучающиеся на уровне основного общего образования не до конца осознают фундаментальный характер математических основ информатики, его основополагающую роль в развитии информационных технологий; более того, они не настроены на продолжение занятий математикой на уроках информатики. В результате обучающиеся теряют интерес к изучению фундаментальных основ информатики. Для изменения сложившейся ситуации необходим поиск новых подходов к обучению информатике, обеспечивающих не только достижение предметных образовательных результатов, но и способствующих развитию творческих способностей учащихся, формированию у них компетенций, необходимых для поиска решений самых разных исследовательских задач [4, 5]. Одним из самых известных способов развития творческих способностей обучающихся является эвристическое обучение – обучение, основанное на самостоятельном конструировании обучающегося смысла, цели и содержания обучения (Каптерев П. Ф., Фуше А., Хуторской А. В. и др.) [6, 7, 8]. Для курса информатики основной школы соответствующая методика практически не разработана, еще реже встречаются методические разработки уроков по математическим основам информатики, разработанные с элементами эвристического обучения. Вышеизложенное определяет актуальность проблематики настоящей работы, а именно изучение технологии эвристического обучения и внедрения ее элементов в обучение информатике на уровне основного общего образования.

Согласно примерной основной образовательной программе основного общего образования (ПООП ООО) содержание раздела «Математические основы информатики» представлено следующими тематическими блоками: «Тексты и кодирование», «Дискретизация»,

«Системы счисления», «Элементы комбинаторики, теории множеств и математической логики», «Списки, графы, деревья».

Рассмотрим место, объем и содержание раздела «Математические основы информатики» в различных учебниках по информатике для 8 класса, а именно в программах Л. Л. Босовой [9], К. Ю. Полякова [10], И. Г. Семакина [11] и А. Г. Кушниренко [12] (табл. 1).

Таблица 1

**Тематический раздел «Математические основы информатики»
в разных УМК**

Автор УМК	Время на освоение раздела	Рассмотренные темы и понятия раздела
Л. Л. Босова	12/24 часа	Системы счисления: позиционные и непозиционные системы счисления, основание и алфавит системы счисления, двоичная система счисления. Тексты и кодирование: представление целых и вещественных чисел в компьютере. Элементы математической логики и теории множеств: высказывания, логические значения высказываний, логические выражения, логические операции, таблицы истинности, множество
К. Ю. Поляков	11/19 часов	Тексты и кодирование: символ, язык, алфавит, текст, естественные и формальные языки, кодовая таблица, равномерный и неравномерный коды, декодирование, количество информации, единицы измерения, коды с обнаружением и исправлением ошибок, помехоустойчивый код. Системы счисления: позиционные и непозиционные системы счисления, основание системы счисления, алфавит системы счисления, краткая и развернутая формы записи числа, двоичная, восьмеричная и шестнадцатеричная системы счисления. Дискретизация: дискретизация, принципы дискретного кодирования, кодирование цвета, цветовые модели, глубина цвета, растровое кодирование, векторное кодирование, кодирование звука и видео, частота дискретизации, разрядность кодирования, аналоговый сигнал, канал связи, сжатие данных
И. Г. Семакин	3 часа	Элементы математической логики: высказывание, логические величины, операции, формулы, таблица истинности. Системы счисления: позиционные и непозиционные системы счисления, основание системы, развернутая форма записи числа; двоичная, восьмеричная, шестнадцатеричная системы счисления. Тексты и кодирование: алфавит, представление данных в компьютере

Автор УМК	Время на освоение раздела	Рассмотренные темы и понятия раздела
А. Г. Кушниренко	11/25 часов	Системы счисления: позиционные системы счисления, двоичная система счисления Кодирование: представление целых чисел в памяти компьютера. Дискретизация: кодирование цвета, цветовые модели, глубина цвета, растровое кодирование, векторное кодирование, кодирование звука и видео, частота дискретизации, разрядность кодирования, сжатие данных

Анализ вышеупомянутых учебников и программ по информатике показал, что в 8-м классе раздел «Математические основы информатики» в большей степени представлен темой «Системы счисления», поскольку данный тематический блок встречается во всех рассмотренных УМК и на его изучение отводится большое количество учебного времени, отведенного на исследуемый раздел. Вместе с тем, во всех УМК встречаются материалы по теме «Тексты и кодирование» в разном объеме. Некоторые УМК содержат материалы по теме «Дискретизация» в небольшом, но и не слишком маленьком объеме. Также, некоторые УМК для 8-го класса содержат материалы по теме «Элементы комбинаторики, теории множеств и математической логики», особенно подробно данная тема рассмотрена в программе Л. Л. Босовой. Таким образом, содержание и объем раздела «Математические основы информатики» в 8 классе могут варьироваться в зависимости от конкретной программы, но основой раздела может считаться тематический блок «Системы счисления».

Для того, чтобы сделать вывод о возможности использования технологии эвристического обучения на уроках информатики, проанализируем существующие подходы к данному понятию. А. В. Хуторской, – определяет эвристическое обучение так – это обучение, ставящее главной задачей конструирование учеником собственного смысла, целей и содержания образования, а также процесса его организации [6].

П. Ф. Каптерев считал, что «эвристическая форма обучения есть такая, по которой научные законы, формулы, правила и истины открываются и вырабатываются самими учениками под руководством учителя. Внешний вид этой формы в народной школе вопросно-ответный. Вопросы – наводящие по преимуществу» [7].

Таким образом, смысл эвристического обучения заключается в том, чтобы не давать обучающимся уже готового культурно-исторического знания, а давать возможность открывать знания самостоятельно, проходя путь их создания, после чего сравнивать полученные результаты с достижениями человечества в этой области.

Для того, чтобы сделать вывод о возможности использования технологии эвристического обучения на уроках информатики, проанализируем существующие подходы к реализации раздела «Математические основы информатики» в основной школе (табл. 2).

Таблица 2

Л. Л. Босова	К. Ю. Поляков	И. Г. Семакин	А. Г. Кушниренко
Тексты и кодирование			
Объяснение с использованием презентаций, анимации, выполнение заданий, упражнений в рабочей тетради, практические работы, тесты	Наглядно-иллюстративное изложение с использованием презентаций, тесты, наглядные, практические и контрольные ЭОР на сайте ФЦИОР, практические работы	Лекция с использованием демонстрационных материалов, выполнение заданий из учебника, тестовых заданий и упражнений в рабочей тетради, ЦОР из ЕКЦОР	Объяснение, показ, практические работы, выполнение практических заданий
Дискретизация			
Объяснение с использованием презентаций, анимации, решение задач, практические работы, тренажер «Интерактивный задачник», практические и контрольные ЭОР на сайте ФЦИОР, интерактивный тест	Наглядно-иллюстративное изложение с использованием презентаций, выполнение заданий в рабочей тетради, практикум, выполнение тестов	Лекция с использованием демонстрационных материалов, выполнение заданий из учебника, ЦОР из ЕКЦОР	Объяснение, показ, практические работы, исследовательские работы, самостоятельное изучение обучающимися
Системы счисления			
Объяснение с использованием презентаций, анимации, информационные, практические и контрольные ЭОР на сайте ФЦИОР, тренажер «Интерактивный задачник», выполнение заданий, упражнений в рабочей тетради, виртуальная лаборатория, тесты	Наглядно-иллюстративное изложение с использованием презентаций, тесты, выполнение заданий в рабочей тетради, практические работы	Лекция с использованием демонстрационных материалов, выполнение заданий из учебника, ЦОР из ЕКЦОР, тесты, кроссворды, лабораторные работы	Объяснение, показ, частично-поисковые упражнения, возможно самостоятельное изучение темы учащимися

Л. Л. Босова	К. Ю. Поляков	И. Г. Семакин	А. Г. Кушниренко
Элементы комбинаторики, теории множеств и математической логики			
Объяснение с использованием презентации, выполнение заданий, решение задач, тесты, информационные, практические и контрольные ЭОР на сайте ФЦИОР, практические работы, тренажер «Логика»	Наглядно-иллюстративное изложение с использованием презентаций, тесты, практические работы, наглядные, практические и контрольные ЭОР на сайте ФЦИОР, выполнение заданий в рабочей тетради, тренажеры	Лекция с использованием демонстрационных материалов, выполнение заданий из учебника, ЦОР из ЕКЦОР, интерактивный задачник, лабораторные работы	Объяснение, показ, решение задач, выполнение практических заданий
Списки, графы, деревья			
Объяснение с использованием презентаций, анимации (ЕКЦОР), интерактивный задачник, выполнение заданий, упражнений в рабочей тетради	Наглядно-иллюстративное изложение с использованием презентаций, тесты, практикум	Лекция с использованием демонстрационных материалов, выполнение заданий из учебника, тесты, кроссворды, лабораторные работы	Объяснение, показ

Анализ существующих подходов показал, что при реализации раздела «Математические основы информатики» в основной школе наиболее часто используемыми методами обучения являются рассказ, объяснение, демонстрация, лекция, беседа, упражнения, тесты, практические работы. Перечисленные методы относятся к объяснительно-иллюстративным или репродуктивным методам обучения. Таким образом, теоретический материал, фронтально излагаемый учителем, оказывается достаточно объемным, что затрудняет процесс усвоения необходимых знаний для учащихся, а также приводит к снижению мотивации учеников к обучению информатике. Практическая часть в большей степени состоит из решения типовых заданий и выполнения практических работ на развитие навыков применения полученных теоретических знаний, что чаще всего лишает учеников возможности к реализации их творческого потенциала. В большинстве случаев практическая работа по рассматриваемой теме сводится к репродуктивной деятельности обучающихся.

Для того, чтобы предотвратить возможное появление препятствий или преодолеть возникающие преграды на пути обучения разделу «Математические основы информатики», которые были названы выше, можно воспользоваться технологией эвристического обучения.

Опишем возможные связи тем исследуемого раздела с формами и методами эвристического обучения в контексте применения последних при реализации конкретных этапов процесса обучения математическим основам информатики.

Поскольку математические основы содержат в себе большое количество новых понятий, которые требуют знания их четких определений и понимания сути этих определений, то при обучении этим понятиям можно использовать эвристический метод конструирования понятий. Такой метод подразумевает самостоятельное формулирование обучающимися определения некоторого понятия на основе собственных представлений об изучаемом понятии, путем выдвижения предположений о том, как может звучать искомое определение, какова ключевая сущность понятия. Работа при этом ведется коллективно, из нескольких различных предположений учащиеся в ходе обсуждения стоят определение, а учитель при необходимости корректирует ход мыслей участников обсуждения и помогает облечь определение в строгую форму, близкую к общепринятой. Такой прием может быть применен, например, к определению понятия «высказывание» при обучении элементам математической логики.

Аналогичным образом может быть применен метод конструирования правил при изучении таких правил раздела «Математические основы информатики», как правила перевода чисел из одной системы счисления в другую, правило построения таблицы истинности логического выражения.

Другим примером использования эвристического обучения может служить проведение урока по теме «Двоичное кодирование» в форме поискового эвристического урока. Такой урок предполагает самостоятельное (например, по командам) отыскание учениками решения некоторой проблемы, объявленной учителем и получение по результатам поиска некоторого знания, образовательного продукта. По названной теме можно предложить ученикам следующую проблему: закодировать некоторое сообщение двумя символами (например, 0 и 1) так, чтобы его можно было расшифровать (декодировать).

Многие уроки раздела могут быть проведены в форме эвристической беседы, когда у учеников есть возможность рассуждать на тему тех или иных новых изучаемых фактов и в процессе беседы между собой и с учителем открывать новые для них знания, свойства, факты об устройстве окружающего мира. Роль учителя при этом в большей степени наводящая и контролирующая.

Таким образом, применение эвристических форм и методов обучения может помочь преодолеть сложности, которые могут возникать при обучении разделу «Математические основы информатики» в школе. Ориентировка на продуктивные методы позволит избежать непонимания учениками практической ценности освоения материала, а большой объем теоретического материала компенсируется творческой деятельностью обучающихся, что также даст им возможность реализации своего творческого потенциала.

Список литературы

1. Григорьев С. Г., Родионов М. А., Кочеткова О. А. Образовательные возможности технологий дополненной и виртуальной реальности // Информатика и образование. 2021. № 10 (329). С. 43–56.
2. Газейкина А. И., Новикова А. Э. Применение элементов дополненной реальности в процессе обучения школьников математике и информатике // Актуальные вопросы преподавания математики, информатики и информационных технологий. 2023. № 8. С. 130–143.
3. Горев П. М. Курс «Математические основы информатики» для 7–9-х классов средней школы в структуре непрерывного математического образования // Концепт. 2015. № 12. С. 1–5.
4. Кочеткова О. А. Содержательно-методические особенности использования web-сервисов в школьном курсе информатики // Научное обозрение. Педагогические науки. 2019. № 2-1. С. 7–11.
5. Антифеева Е. Л., Петрова Д. Г. Технология методического сопровождения решения задач как средство формирования исследовательских компетенций обучающихся // Казанский педагогический журнал. 2023. № 1 (156). С. 165–171.
6. Андрианова Г. А. Исследования в области эвристического обучения: обзор изданий Научной школы А. В. Хуторского // Вестник Института образования человека. 2014. № 2. С. 13.
7. Беленчук Л. Н. Историко-педагогическая концепция П. Ф. Каптерева // Отечественная и зарубежная педагогика. 2014. № 6 (21). С. 31–42.
8. Федоров К. П. Эвристические методы обучения в преподавании курса информатики и ИКТ для учащихся нематематического профиля // Известия Российского государственного педагогического университета им. А. И. Герцена. 2014. № 170. С. 116–124.
9. Босова Л. Л., Босова А. Ю. Информатика. 7–9 классы : метод. пособие. М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2016. 464 с.
10. Поляков К. Ю., Еремин Е. А. Информатика. 7–9 классы : метод. пособие. М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2016. 80 с.
11. Семакин И. Г., Цветкова М. С. Информатика : метод. пособие для 7–9 классов. М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2016. 160 с.
12. Кушниренко А. Г., Леонов А. Г., Зайдельман Я. Н., Тарасова В. В. Информатика: 8 класс : учебник. М. : Дрофа, 2018. 224 с.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ПЛЕНАРНЫЕ ДОКЛАДЫ

<i>Мартынов С. И., Ткач Л. Ю.</i> ДИНАМИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ВРАЩАЮЩИХСЯ В ЖИДКОСТИ ЧАСТИЦ	3
<i>Faydaoglu S.</i> ON ANALYTICAL METHODS FOR CLASSICAL AND FRACTIONAL OSCILLATORS	8
<i>Рассадин А. Э.</i> СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ KPZ НА ОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ	15
<i>Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А., Абрашкин П. М.</i> МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ «ТРУБОПРОВОД – ДАТЧИК ДАВЛЕНИЯ».....	21
<i>Сидоров Д. Н., Сидоров Н. А.</i> ИНТЕГРО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА ВТОРОГО РОДА: ТОЧКИ СПЕКТРА И СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ	28
<i>Алиев Бахрам Али оглы, Гусейнова Тунзала Магеррам кызы</i> ОБ АСИМПТОТИКЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА.....	31
<i>Сошников Д. В., Головашкин Д. Л.</i> РАСЧЕТ ФОТОННО-КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТИ.....	39
<i>Лерер А. М., Иванова И. Н.</i> ПРЯМОЙ МЕТОД РАСЧЕТА ОТРАЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ ОТ НЕЛИНЕЙНОГО СЛОЯ.....	44

Макеева Г. С.

ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ И ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЙ
АНАЛИЗ РЕЗОНАНСНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
МИКРОВОЛНОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ
С 3D-МАГНИТНЫМИ НАНОКОМПОЗИТАМИ..... 50

Черный В. В., Капранов С. В.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОИСХОЖДЕНИЯ
ПЛОТНЫХ (ВИДИМЫХ) КОЛЕЦ САТУРНА
С УЧЕТОМ ЕГО ГРАВИТАЦИОННОГО
И МАГНИТНОГО ПОЛЕЙ. ЭФФЕКТ
ЧЕРНОГО – КАПРАНОВА..... 62

Boykov I. V.

SCIENTIFIC RESEARCH AT THE DEPARTMENT
OF "HIGHER AND APPLIED MATHEMATICS"
OF PENZA STATE UNIVERSITY (1943–2023)..... 75

2. УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Васильева О. А., Филиппов Г. А.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ МАЛОГО ПАРАМЕТРА
НА СКОРОСТЬ СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ
ОДНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ 101

Шилин А. П.

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ,
ВЫРАЖАЮЩИМИСЯ ЧЕРЕЗ ДВЕ ЗАДАННЫЕ
ФУНКЦИИ..... 104

Гребенева А. А., Лукьяненко В. А.

ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ
СПИНОВОГО ГОРЕНИЯ..... 108

Бойков И. В., Айкашев П. В.

К ВОПРОСУ О ГРАНИЦАХ ПРИМЕНИМОСТИ
УРАВНЕНИЙ ПОКЛИНГТОНА И ГАЛЛЕНА
ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ
ВИБРАТОРОВ 114

3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

- Кудряшова Н. Ю., Багдалов С. Р.**
ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ
СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
С ЯДРОМ ТИПА КОШИ НА ЗАМКНУТЫХ КОНТУРАХ 131
- Антонова П. М., Грозная Е. В.**
НЕПОЛИНОМИАЛЬНОЕ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ
ФУНКЦИЙ С БОЛЬШИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ 135
- Кудряшова Н. Ю., Купряшина Л. А.**
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ
АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ
ФУНКЦИЙ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ 141
- Тарасов Д. В., Лапкин В. В.**
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИИ МРІ ПРИ РЕАЛИЗАЦИИ
МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО НА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ
СИСТЕМАХ С ОБЩЕЙ ПАМЯТЬЮ 148
- Хубежты Ш. С., Плиева Л. Ю.**
КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ
ИНТЕГРАЛОВ, СОДЕРЖАЩИЕ ЗНАЧЕНИЯ
ФУНКЦИЙ И ПРОИЗВОДНЫХ 153
- Скворцов О. С.**
ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ
ДИФРАКЦИИ НА НЕОДНОРОДНОМ ШАРЕ,
ПОКРЫТОМ СЛОЕМ МАТЕРИАЛА
СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ 157
- Цидаев А. Г.**
ОПТИМИЗАЦИЯ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ
СХЕМЫ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ ГРАВИМЕТРИИ
В КЛАССЕ СТРУКТУРНЫХ ГРАНИЦ 162

4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ФИЗИКЕ И ТЕХНОЛОГИЯХ

- Калабкин Е. С., Мамедова Т. Ф.**
ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ОБРАБОТКА СООБЩЕНИЙ
ИЗ МЕССЕНДЖЕРА С ПОМОЩЬЮ
БАЛАНСИРОВЩИКА НАГРУЗКИ..... 166

Иванов А. И., Тарасов Д. В.
 ЧИСЛЕННОЕ ОПИСАНИЕ ОТСУТСТВИЯ
 ВОЗМОЖНОСТИ У ФУНКЦИОНАЛОВ ХЁРСТА
 РАЗЛИЧАТЬ ПОЛОЖИТЕЛЬНО И ОТРИЦАТЕЛЬНО
 КОРРЕЛИРОВАННЫЕ БРОУНОВСКИЕ БЛУЖДЕНИЯ 171

Макарычев П. П.
 ФОРМАЛИЗОВАННАЯ ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ
 ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ КОМБИНАТОРНЫМ
 МЕТОДОМ..... 177

Литвинов А. Н.
 МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛООВОГО ПРОЦЕССА
 В ЗОНЕ КОНТАКТА ТРИБОСОПРЯЖЕНИЙ
 С АНТИФРИКЦИОННЫМИ ПОКРЫТИЯМИ 183

Макеева Г. С.
 МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЧАСТОТНОЙ
 ДИСПЕРСИЕЙ ВОЛН В РЕКОНФИГУРИРУЕМЫХ
 3D-РЕШЕТКАХ ФЕРРОМАГНИТНЫХ НАНОПРОВОЛОК
 В МИЛЛИМЕТРОВОМ ДИАПАЗОНЕ 189

Лерер А. М., Макеева Г. С.
 МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ ХАРАКТЕРИСТИК
 ГРАФЕНОВЫХ ДИФРАКЦИОННЫХ РЕШЕТОК
 МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ В ТГц-ДИАПАЗОНЕ ЧАСТОТ 202

Язовцева О. С.
 ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛООВОГО БАЛАНСА В МОДЕЛИ
 ОКИСЛИТЕЛЬНОЙ РЕГЕНЕРАЦИИ КАТАЛИЗАТОРА 209

Макеева Г. С.
 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
 РАСПРОСТРАНЕНИЯ И ДИФРАКЦИИ МИКРОВОЛН
 В АНИЗОТРОПНЫХ МАГНИТНЫХ НАНОКОМПОЗИТАХ
 И 3D-НАНОСТРУКТУРАХ НА ОСНОВЕ
 ОПАЛОВЫХ МАТРИЦ..... 214

5. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ, ЭКОЛОГИИ, БИОЛОГИИ, ИММУНОЛОГИИ

Гринцов М. И., Бофанова Н. С., Князькина Ю. А.
 АСТРОФИЗИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОФИЛАКТИКИ
 В ПЕРСОНИФИЦИРОВАННОЙ МЕДИЦИНЕ 226

Кутыркина М. А., Мамедова Т. Ф. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭПИЛЕПТИЧЕСКИХ РАЗРЯДОВ В НЕЙРОННЫХ СЕТЯХ.....	235
---	-----

Черушева Т. В., Зверовщикова Н. В., Айкашев П. В. МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЫПУСКНИКОВ ИНЖЕНЕРНО-ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛИСТОВ ПГУ.....	240
--	-----

Гринцов М. И., Бофанова Н. С., Князькина Ю. А., Гринцова В. М. К ВОПРОСУ О НЕОБХОДИМОСТИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ КОСМИЧЕСКИХ ИЗЛУЧЕНИЙ ДЛЯ ПРОФИЛАКТИКИ ВРОЖДЕННЫХ ЗАБОЛЕВАНИЙ.....	245
---	-----

Аюпова А. С., Захарова Ю. Ф. ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ГРАФОВ В АЛГОРИТМАХ КРИПТОГРАФИИ	255
--	-----

6. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБРАЗОВАНИИ

Чепухин Г. Х., Акимова И. В. ТЕТРАДЬ-НАВИГАТОР КАК СРЕДСТВО ОБУЧЕНИЯ НА УРОКАХ ИНФОРМАТИКИ	261
---	-----

Пудовкина Ю. Н., Животкова Ю. В. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИИ ЭВРИСТИЧЕСКОГО ОБУЧЕНИЯ НА УРОКАХ ИНФОРМАТИКИ.....	265
---	-----

Научное издание

Аналитические и численные методы
моделирования естественно-научных
и социальных проблем
(АЧМ–2023)

Россия, г. Пенза, 6–10 ноября 2023 г.

Часть 1

П о д р е д а к ц и е й
доктора физико-математических наук,
профессора Ильи Владимировича **Бойкова**

Все материалы представлены в авторской редакции

Корректор *А. А. Есавкина*
Компьютерная верстка *Н. В. Ивановой*
Дизайн обложки *Е. В. Карасёвой*

Подписано в печать 22.12.2023.
Формат 60×84¹/₁₆. Усл. печ. л. 16,27.
Заказ № 774.1. Тираж 70.

Издательство ПГУ.
440026, г. Пенза, ул. Красная, 40.
Тел.: (8412) 66-60-49, 66-67-77; e-mail: iic@pnzgu.ru